Г. И. Просветов

МАТЕМАТИКА для ГУМАНИТАРИЕВ: ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Учебно-практическое пособие

Москва
Альфа-Пресс
2008

УДК 51(07)
ББК 22.1
П 82

П 82 **Просветов Г. И.**

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРИЕВ: ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ: Учебно-практическое пособие. — М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008. — 320 с.

ISBN 978-5-94280-357-5

В настоящем учебно-методическом пособии для людей, которые по роду занятий профессиональио ие связаиы с математикой, представлеиы все основиые разделы этой фундаментальной иауки с целью создания иеобходимого базиса знаний, без которого даже в гуманитариой области ие сможет состояться ии одии грамотиый и востребованиый специалист.

В пособии большое внимание уделеио лииейиой алгебре и геометрии, теории вероятиостей и теории статистических исследований, а также математическому анализу, дискретной математике и математической логике.

Для преподавателей и студентов высших учебиых заведеиий.

УДК 51(07)
ББК 22.1

Предисловие

> Математика и опыт — вот подлинные основания достоверного, естественного, разумного живого познания.
>
> Спиноза

Поступая в гуманитарный вуз, абитуриенты и не думали, что придется столкнуться с математикой. Но раз практика потребовала математику, то эту математику нужно изучать. Лет двадцать назад разговоры о математизации знаний вызывали лишь улыбку. Но после обвальной компьютеризации уже никто не подвергает сомнению право на жизнь математических методов в гуманитарных науках.

Первая трудность в изучении математики гуманитариями состоит в том, что изучать математику предстоит тем, кто уже мысленно распрощался с ней после окончания школы и полагал никогда больше с ней не встречаться. Трудность вторая — отсутствие учебников, рассчитанных именно на такую аудиторию.

Программы по математике для студентов гуманитарных и инженерно-технических специальностей существенно различаются. Поэтому все хорошо себя зарекомендовавшие и выдержавшие не одно издание вузовские учебники по математике для студентов инженерно-технических специальностей мало в чем могут помочь в изучении математики студентам гуманитарных специальностей.

Появившиеся на смену «старой гвардии» всевозможные математические учебники для студентов-гуманитариев не выдерживают никакой критики. Либо они и по содержанию, и по объему практически ничем не отличаются от своих предшественников и не учитывают реальные учебные планы обучения (особенно заочников и вечерников). Либо вместо математики в этих учебниках содержится набор научно-популярных текстов на темы «Математика — общеобразовательная дисциплина», «Роль математики в формировании логического мышления», «Математика — теоретическая основа информатики» и т. д. Либо учебники написаны маститыми учеными-гуманитария-

ми, которые хотя и являются в своей области звездами первой величины, но в математике всего лишь самоучки (о чем они даже с некоторой гордостью сообщают в предисловии к своим книгам). Нередко учебники написаны коллективом авторов, поэтому даже внутри одного учебника изложение материала дается по-разному.

Но ведь недаром говорят, что «математика вприглядку не изучается». Поэтому, по мнению автора данного пособия, ощущается потребность в пособии, охватывающем всю математику для студентов гуманитарных специальностей, построенном по единому методологическому принципу и ориентированном на читателя со скромной математической подготовкой. Одна из попыток решить эту задачу перед вами, уважаемый читатель.

Пособие состоит из четырех разделов:

1) линейная алгебра и геометрия;
2) математический анализ;
3) теория вероятностей и математическая статистика;
4) дискретная математика и математическая логика.

В раздел «Линейная алгебра и геометрия» вошли следующие темы: матрицы, определители, системы линейных уравнений, векторы, прямая на плоскости, линейные операторы, линейные пространства, многочлены, собственные векторы, евклидовы пространства.

Раздел «Математический анализ» содержит следующие темы: множество, функция, последовательность, предел функции, непрерывность, производная, неопределенный и определенный интегралы, ряды, дифференциальные уравнения.

В разделе «Теория вероятностей и математическая статистика» рассмотрены темы: основные понятия теории вероятностей, действия с вероятностями, дерево вероятностей, формула Байеса, повторение испытаний, простейший поток событий, относительная частота, дискретные и непрерывные случайные величины, выборочный метод, вариационные ряды, расчет сводных характеристик выборки, доверительные интервалы, испытание гипотез, индексы, линейная регрессия, порядковые испытания, дисперсионный анализ, линейная корреляция.

В разделе «Дискретная математика и математическая логика» представлены комбинаторика, булевы функции, нормальные формы, предикаты, основные понятия теории графов, задача о кратчайшем пути, коммуникационная сеть, правила вывода и получение выводимых суждений, алгоритм.

Каждый раздел разбит на главы, а главы — на параграфы. Каждый параграф — это отдельная тема. В начале параграфа приводится не-

обходимый минимум теоретических сведений, затем подробно разбираются модельные примеры. Показано, как с помощью встроенных функций и надстройки «Пакет анализа» пакета Excel можно избежать долгих и утомительных вычислений. После каждого примера приводится задача для самостоятельного решения. Ответы ко всем задачам помещены в конце соответствующего раздела. Также в конце каждого раздела приведены программа этого раздела и задачи для контрольной работы. Каждый раздел фактически можно рассматривать как самостоятельный курс, методически согласованный с остальными.

Не секрет, что уровень преподавания школьной математики за последние годы неуклонно снижается. И это очень печальный факт. Для ликвидации пробелов в знании школьной программы по математике в предлагаемом пособии напоминаются все нужные сведения из школьной математики.

Конечно, математика не всесильна. Это лишь одна из наук. Но из-за абстрактности своих объектов математика применима в других науках. Математические методы обеспечивают возможность количественных сравнений, краткие символические интерпретации, обоснованность прогнозов и решений. Чем проще методы математической обработки и чем ближе они к реально полученным эмпирическим данным, тем более надежными и осмысленными получаются результаты.

Математика — это обширная и бурно развивающаяся область знаний. Но она далеко не однородна. Многие методы играют служебную роль в самой математике. Широко распространенный в математике аксиоматический подход с тщательным доказательством теорем настолько затемняет простую суть математических объектов и операций, что пробиться к ней не хватает ни терпения, ни сил, ни времени.

Польза от применения математики в гуманитарных науках велика, но и труда на ее освоение нужно много. Зато он окупается сполна.

Конечно, нельзя досконально изучить все рассмотренные в этой книге математические методы впрок, раз и навсегда. Но познакомиться и попытаться их понять нужно. А детали можно уточнить в дальнейшем, когда возникнет в этом необходимость.

За основу пособия принят материал курсов, читаемых автором в Российской академии предпринимательства. Всем студентам, прослушавшим эти курсы, автор выражает благодарность за продуктивную совместную работу. Материал книги использовался автором

в 2000—2002 годах в Европейском университете права и Московском социально-экономическом университете.

Автор выражает искреннюю признательность В. М. Трояновскому за многочисленные замечания, способствовавшие улучшению книги.

Хочется надеяться, что знакомство с книгой будет как приятным, так и полезным.

Автор

Раздел I

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТИЯ

Глава 1

МАТРИЦЫ

Матрицей (точнее *числовой матрицей*) размера $m \times n$ (произносится «эм на эн») называется таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Будем обозначать матрицы латинскими буквами A, B, C, ...

Числа, составляющие матрицу, называются ее *элементами*. Каждый элемент a_{ij} имеет два индекса i и j, которые показывают, что элемент находится в i-й строке и j-м столбце. В экономической практике элементами матриц являются вещественные числа.

Пример 1. Элемент a_{12} расположен в 1-й строке и 2-м столбце, а элемент a_{31} находится в 3-й строке и 1-м столбце.

Задача 1. Что можно сказать о расположении элемента a_{24}?

Используют следующие обозначения матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A = (a_{ij}).$$

Пример 2. Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ имеет размер 2×4, так как она содержит 2 строки и 4 столбца. Матрица $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & -1 \\ 0{,}5 & 8 \end{pmatrix}$ имеет размер 3×2, так как она содержит 3 строки и 2 столбца.

Задача 2. Привести пример матрицы размер 2×3.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m = n$) называется *квадратной матрицей порядка n*. Иначе матрица называется *прямоугольной*.

Пример 3. Матрицы A и B из примера 2 прямоугольные. Матрица $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ — это квадратная матрица порядка 3. Она содержит 3 строки и 3 столбца.

Задача 3. Привести пример квадратной матрицы второго порядка.

Нулевая матрица — это матрица из одних нулей. Квадратная матрица следующего вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(элементы $a_{ii} = 1$, $i = 1, \dots, n$, на диагонали равны 1, все остальные элементы равны 0) называется ***единичной матрицей порядка n*** и обозначается латинской буквой E.

Пример 4. $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — это примеры единичных матриц порядков 2 и 3 соответственно.

Задача 4. Как выглядит единичная матрица четвертого порядка?

§ 1.1. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ

1. *Умножение на число.* При умножении матрицы $A = (a_{ij})$ на число а каждый ее элемент умножается на это число: $\alpha A = (\alpha a_{ij})$.

Пример 5. Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Тогда $2A = \begin{pmatrix} 2\times1 & 2\times2 & 2\times3 \\ 2\times0 & 2\times4 & 2\times5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ найти матрицу $5A$.

2. *Сложение.* Это действие применимо только к матрицам одинакового размера. Сумма матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ размера $m \times n$ есть матрица C размера $m \times n$, элементы которой есть сумма соответствующих элементов матриц A и B: $C = A + B = (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij})$.

Пример 6. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 \\ 16 & 11 & 6 \end{pmatrix}$.

Размер матриц A и B одинаков (2×3). Матрица $C = A + B =$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 \\ 16 & 11 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 2+8 & 3+10 \\ 7+16 & 5+11 & 9+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 13 \\ 23 & 16 & 15 \end{pmatrix}$$
также имеет размер 2×3.

Задача 6. Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 10 & 17 & 13 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 30 & 18 & 2 \\ 1 & 5 & 19 \end{pmatrix}$.

3. *Вычитание.* Это действие применимо только к матрицам одинакового размера. Разность матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ размера $m \times n$ есть матрица D размера $m \times n$, элементы которой есть разность соответствующих элементов матриц A и B: $D = A - B = (d_{ij} = a_{ij} - b_{ij})$.

Пример 7. Для матриц A и B из примера 6: $D = A - B =$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 \\ 16 & 11 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4 & 2-8 & 3-10 \\ 7-16 & 5-11 & 9-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -7 \\ -9 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 7. Найти разность матриц A и B из задачи 6.

4. *Транспонирование.* Из матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ получается матрица A' размера $n \times m$ следующим образом: $A' = (a^{t}_{ij} = a_{ji})$, то есть надо строки матрицы A записать в виде столбцов.

Пример 8.

Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 6 & 9 \\ 13 & 7 & 18 & 19 \end{pmatrix}$. Тогда $A' = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 13 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 18 \\ 4 & 9 & 19 \end{pmatrix}$.

Задача 8. Транспонировать матрицу $A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 4 & 6 & 19 \\ 3 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

5. *Умножение.* Произведение матриц $A = (a_{is})$ размера $m \times k$ и $B = (b_{sj})$ размера $k \times n$ есть матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times n$, элементы которой $c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}$, то есть для получения элемента c_{ij} нужно i-ю строку матрицы A умножить поэлементно на j-й столбец матрицы B и полученные произведения сложить. $A_{m \times k} B_{k \times n} = C_{m \times n}$.

Порядок умножения матриц A и B очень важен. Число столбцов (k) 1-го множителя должно равняться числу строк 2-го множителя. Вообще говоря, $AB \neq BA$.

Пример 9. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 6 & 11 & 12 & 10 \end{pmatrix}$.

Тогда $A_{2\times3}B_{3\times4} = C_{2\times4} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}$.

Для нахождения элемента c_{11} (1-я строка, 1-й столбец) нужно 1-ю строку матрицы A умножить поэлементно на 1-й столбец матрицы B и полученные произведения сложить: $c_{11} = 1 \times 8 + 2 \times 3 + 3 \times 6 = 32$.

Для нахождения элемента c_{12} (1-я строка, 2-й столбец) нужно 1-ю строку матрицы A умножить поэлементно на 2-й столбец матрицы B и полученные произведения сложить: $c_{12} = 1 \times 10 + 2 \times 4 + 3 \times 11 = 51$.

Для нахождения элемента c_{21} (2-я строка, 1-й столбец) нужно 2-ю строку матрицы A умножить поэлементно на 1-й столбец матрицы B и полученные произведения сложить: $c_{21} = 7 \times 8 + 4 \times 3 + 5 \times 6 = 98$. И т. д.

$C = \begin{pmatrix} 32 & 51 & 45 & 35 \\ 98 & 141 & 123 & 65 \end{pmatrix}$.

Произведение же матриц в другом порядке ($B_{3\times4}A_{2\times3}$) не существует, так как $4 \neq 2$.

Задача 9. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$. Найти произведения AB, BA.

Пример 10. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Тогда $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times5+2\times6 & 1\times9+2\times7 \\ 3\times5+4\times6 & 3\times9+4\times7 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 17 & 23 \\ 39 & 55 \end{pmatrix}$. $BA = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 46 \\ 27 & 40 \end{pmatrix}$. Мы получили, что $AB \neq BA$.

Задача 10. Привести пример матриц A, B, для которых $AB \neq BA$.

Замечание. Математическая функция *МУМНОЖ* мастера функций f_x пакета Excel позволяет быстро перемножить матрицы. Перед

вызовом этой функции надо выделить мышкой диапазон ячеек нужного размера, куда после выполнения процедуры будет помещен ответ. f_x → *Математические* → *МУМНОЖ* → *OK*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графах *массив 1* и *массив 2* указывается ссылка на ячейки, содержащие значения 1-го и 2-го матричных множителей соответственно. После этого нажимается не *OK*, а одновременная комбинация клавиш *Ctrl* + *Shift* + *Enter*.

§ 1.2. СВОЙСТВА ДЕЙСТВИЙ С МАТРИЦАМИ

При условии, что операции имеют смысл, справедливы следующие свойства:

1) $A + B = B + A$;
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3) $AB \neq BA$;
4) $(AB)C = A(BC)$;
5) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
6) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
7) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
8) $(A + B)C = AC + BC$;
9) $C(A + B) = CA + CB$.

Глава 2

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Понятие определителя вводится только для квадратной матрицы. *Определитель* — это число, которое считается для квадратной матрицы по некоторым вполне определенным правилам. *Порядок определителя* — это порядок квадратной матрицы. Если при задании матриц использовались круглые скобки, то в теории определителей используют прямые скобки.

§ 2.1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда определитель второго порядка det A вычисляется по следующему правилу:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \text{ или } \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix} = \begin{matrix} * & * \\ * & * \end{matrix} - \begin{matrix} * & * \\ * & * \end{matrix}.$$

Соединенные числа нужно перемножить и полученное произведение взять с указанным знаком.

Пример 11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2.$

Задача 11. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$.

§ 2.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Тогда определитель третьего порядка det A вычисляется по следующему правилу:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}, \text{ или}$$

$$\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} = \begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix} + \begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix} + \begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix} - \begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix} -$$

$$- \begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix} - \begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix}.$$

В каждом произведении нет чисел из одного столбца или одной строки. Произведение чисел на одной диагонали берется со знаком «+» (это главная диагональ матрицы), а на другой — со знаком «–». Одна из сторон треугольника должна быть параллельна диагонали матрицы (и соответствующее произведение берется со знаком «+», если это главная диагональ, и со знаком «–», если нет).

Пример 12. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times 4 \times 9 + 8 \times 3 \times 6 + 2 \times 5 \times 7 -$

$- 2 \times 4 \times 8 - 1 \times 6 \times 7 - 9 \times 3 \times 5 = 9.$

Задача 12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

§ 2.3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ И МИНОРЫ

Минором M_{ij} квадратной матрицы A называется определитель матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Пример 13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$. Минор $M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ (вычеркнули 1-ю строку и 2-й столбец) $= -3$. Минор $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$ (вычеркнули 2-ю строку и 3-й столбец) $= -17$.

Задача 13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Найти миноры M_{11}, M_{32} и M_{13}.

Алгебраическое дополнение $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Полезно запомнить, что $(-1)^{2k} = 1$ и $(-1)^{2k+1} = -1$.

Пример 14. В примере 13

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 3, A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -13.$$

Задача 14. В задаче 13 найти алгебраические дополнения A_{22}, A_{12} и A_{31}.

§ 2.4. РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПО СТРОКЕ ИЛИ СТОЛБЦУ

Верны следующие формулы, которые позволяют свести вычисление определителя n-го порядка к вычислению определителей порядка $n - 1$:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

— *разложение определителя по i-й строке.* Каждый элемент i-й строки a_{ij} умножается на свое алгебраическое дополнение A_{ij} (вычеркиваются i-я строка и j-й столбец (то есть строка и столбец, содержащие элемент a_{ij}), вычисляется определитель полученной матрицы и умножается на $(-1)^{i+j}$). Полученные произведения суммируются.

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

— *разложение определителя по j-му столбцу.* Каждый элемент j-го столбца a_{ij} умножается на свое алгебраическое дополнение A_{ij} (вычеркиваются i-я строка и j-й столбец (то есть строка и столбец, содержащие элемент a_{ij}), вычисляется определитель полученной матрицы и умножается на $(-1)^{i+j}$). Полученные произведения суммируются.

Пример 15. В примере 12 разложим определитель по 1-й строке.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$ (вычеркнули 1-ю строку и 1-й столбец, содержащие элемент $a_{11} = 1$)

$$+3\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 9\end{vmatrix}$$ (вычеркнули 1-ю строку и 2-й столбец, содержащие элемент $a_{12}=3$)

$$+2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & 4\\ 8 & 7\end{vmatrix}$$ (вычеркнули 1-ю строку и 3-й столбец, содержащие элемент $a_{13}=2$)

$= 1\times(-1)^2\times(4\times9-6\times7)+3\times(-1)^3\times(5\times9-6\times8)+2\times(-1)^4\times$ $\times(5\times7-4\times8)=9.$

Разложим определитель по 3-й строке.

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 5 & 4 & 6\\ 8 & 7 & 9\end{vmatrix}=8\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 6\end{vmatrix}$$ (вычеркнули 3-ю строку и 1-й столбец, содержащие элемент $a_{31}=8$)

$$+7\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{vmatrix}$$ (вычеркнули 3-ю строку и 2-й столбец, содержащие элемент $a_{32}=7$)

$$+9\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & 4\end{vmatrix}$$ (вычеркнули 3-ю строку и 3-й столбец, содержащие элемент $a_{33}=9$) $=9.$

Разложим определитель по 1-му столбцу.

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 5 & 4 & 6\\ 8 & 7 & 9\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{vmatrix}$$ (вычеркнули 1-ю строку и 1-й столбец, содержащие элемент $a_{11}=1$)

$$+5\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 7 & 9\end{vmatrix}$$ (вычеркнули 2-ю строку и 1-й столбец, содержащие элемент $a_{21}=5$)

$$+8\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 6\end{vmatrix}$$ (вычеркнули 3-ю строку и 1-й столбец, содержащие элемент $a_{31}=8$) $=9.$

Независимо от способа разложения всегда получается один и тот же ответ.

Задача 15. В задаче 12 разложить определитель по 1-й строке, по 2-й строке, по 3-му столбцу.

§ 2.5. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы, то есть $\det A' = \det A$.

2. Если поменять местами две строки (два столбца) определителя, то он изменит знак.

3. Если определитель содержит две одинаковых строки (два одинаковых столбца), то он равен нулю.

4. Если определитель содержит нулевую строку (нулевой столбец), то он равен нулю.

5. Общий множитель в строке (в столбце) можно выносить за знак определителя.

6. Определитель не изменится, если к любой строке прибавить (из любой строки вычесть) любую другую строку, умноженную на любое число. Аналогичное свойство вéрно и для столбцов.

§ 2.6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Выбирается строка (или столбец) определителя, содержащая больше всего нулей. Используя свойство 6, зануляют в этой строке (или столбце) все элементы, кроме одного. После чего разлагают определитель по этой строке (или столбцу). К полученному определителю применяют эту же схему.

Пример 16. Вычислим определитель $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

Мы видим, что все элементы отличны от нуля. В таком случае можно начать с любой строки или любого столбца. Например, с 1-го столбца. Наша цель — занулить все элементы, кроме одного, в 1-м столбце.

Прибавим 2-ю строку поэлементно к 4-й строке, а из 3-й строки вычтем поэлементно 1-ю строку, умноженную на 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4-2\times 2 & -9-2\times(-5) & 8-2\times 4 & 5-2\times 3 \\ -3+3 & 2+(-4) & -5+7 & 3+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{vmatrix}.$$

Вынесем из последней строки общий множитель (2) за знак определителя: $2 \times \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

Мы получили в 1-м столбце два нуля. Также два нуля получены в 3-й строке. Прибавим 2-й столбец поэлементно к 4-му столбцу:

$$2\times\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3+(-5) \\ 3 & -4 & 7 & 5+(-4) \\ 0 & 1 & 0 & -1+1 \\ 0 & -1 & 1 & 4+(-1) \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по 3-й строке:

$$2\times 1\times(-1)^{3+2}\times\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2\times\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Вынесем из 1-й строки общий множитель (2) за знак определителя:

$$-2\times 2\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

По одному нулю в 1-м столбце и 3-й строке. Вычтем из 2-й строки 1-ю строку, умноженную на 3:

$$-4\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3-3\times 1 & 7-3\times 2 & 1-3\times(-1) \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по 1-му столбцу:

$$-4\times 1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4\times\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4.$$

Пример 17. Вычислим определитель $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix} =$

$$= 3\times(-1)\times(-1)\times\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ -4 & 5 & 3 & 2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\times\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ -4 & 5 & 3 & 2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\times\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -3\times\begin{vmatrix} 1 & 3-3\times 1 & 1-1 & 2-2\times 1 \\ 5 & 8-3\times 5 & 2-5 & 7-2\times 5 \\ 4 & 5-3\times 4 & 3-4 & 2-2\times 4 \\ 7 & 8-3\times 7 & 4-7 & 5-2\times 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & -3 & -3 \\ 4 & -7 & -1 & -6 \\ 7 & -13 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -3 \times 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -7 & -3 & -3 \\ -7 & -1 & -6 \\ -13 & -3 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= 9 \times \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 13 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 \times \begin{vmatrix} 7 - 3 \times 7 & 3 - 3 \times 1 & 1 - 3 \times 2 \\ 7 & 1 & 2 \\ 13 - 3 \times 7 & 3 - 3 \times 1 & 3 - 3 \times 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 9 \times \begin{vmatrix} -14 & 0 & -5 \\ 7 & 1 & 2 \\ -8 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 9 \times 1 \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} -14 & -5 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = 18 \times \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= 18.$

Задача 16. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Задача 17. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

Замечание. Математическая функция *МОПРЕД* мастера функций f_x пакета Excel позволяет быстро вычислить определитель матрицы. f_x → *Математические* → *МОПРЕД* → *OK*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *массив* указывается ссылка на ячейки, содержащие элементы определителя. *OK*.

Глава 3

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля. Если при умножении квадратных матриц A и B в любом порядке получается единичная матрица ($AB = BA = E$), то матрица B называется *обратной матрицей* для матрицы A (очевидно, что матрица A — обратная матрица для матрицы B) и обозначается A^{-1}, то есть $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Теорема. Для невырожденной матрицы существует обратная матрица.

§ 3.1. АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Дана квадратная матрица $A = (a_{ij})$. Вычисляем определитель $\det A$. Если $\det A = 0$, то A^{-1} не существует. На место каждого элемента a_{ij} матрицы A нужно поставить его алгебраическое дополнение A_{ij}. Получим матрицу (A_{ij}). Транспонировав полученную матрицу и умножив ее на число $1/\det A$, мы и найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

§ 3.2. НАХОЖДЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Воспользовавшись тем, что $\det A = ad - bc$, $A_{11} = d$, $A_{12} = -c$, $A_{21} = -b$, $A_{22} = a$, мы сразу получим следующую формулу: $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Пример 18. Найдем обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Здесь $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$.

Тогда $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{1 \times 4 - 2 \times 3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$.

Убедимся, что это действительно обратная матрица:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Задача 18. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

§ 3.3. НАХОЖДЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ МАТРИЦ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Пример 19. Найдем обратную матрицу для матрицы

$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

Определитель матрицы $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times (-3) \times (-1) +$

$+ 3 \times (-4) \times 1 + 5 \times (-5) \times 2 - 3 \times (-3) \times 5 - 3 \times (-5) \times 1 - 2 \times (-4) \times$ $\times (-1) = -1 \neq 0$. Поэтому существует обратная матрица.

Вычисляем алгебраические дополнения A_{ij}:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 8.$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5.$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1.$ $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -29.$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -18.$ $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 3.$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 11.$ $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7.$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1.$

Составим из них матрицу $\begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ -29 & -18 & 3 \\ 11 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

Транспонировав полученную матрицу и умножив ее на число $1/\det A = 1/(-1) = -1$, мы и найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = 1/(-1)\begin{pmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 19. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Математическая функция *МОБР* мастера функций f_x пакета Excel позволяет быстро найти обратную матрицу. Перед вызовом этой функции надо выделить мышкой диапазон ячеек нужного размера (порядок обратной матрицы равен порядку исходной матрицы), куда после выполнения процедуры будет помещен ответ. $f_x \to$ *Математические* $\to$ *МОБР* $\to$ *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *массив* указывается ссылка на ячейки, содержащие элементы исходной матрицы. После этого нажимается не *ОК*, а одновременная комбинация клавиш *Ctrl + Shift + Enter*.

§ 3.4. СВОЙСТВА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, где A, B — невырожденные квадратные матрицы одинакового порядка.
2. $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.
4. $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.

Глава 4

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 4.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Система уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij}, b_i — коэффициенты, x_i — переменные, называется *системой линейных уравнений*. Решить систему линейных уравнений — значит указать все решения системы, то есть такие наборы значений переменных, которые обращают уравнения системы в тождества. Система линейных уравнений называется:

а) *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение;

б) *несовместной*, если она не имеет решений;

в) *определенной*, если она имеет единственное решение;

г) *однородной*, если все $b_i = 0$;

д) *неоднородной*, если есть $b_i \neq 0$.

§ 4.2. ПРАВИЛО КРАМЕРА

Правило Крамера применяется к системам, у которых число уравнений m равно числу переменных n, то есть $m = n$.

§ 4.2.1. Случай n = 2

Рассматривается система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Вычисляются определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

1. Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение $x = \Delta_x/\Delta$, $y = \Delta_y/\Delta$.

2. Если $\Delta = 0$, а хотя один из определителей Δ_x, Δ_y отличен от нуля, то система не имеет решений.

3. Если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то система имеет бесконечно много решений.

Пример 20. Решим с помощью правила Крамера систему уравнений: $\begin{cases} 2x + 4y = 7, \\ 3x + 5y = 8. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Поэтому система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 3, \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -5.$$

Тогда $x = \Delta_x/\Delta = 3/(-2) = -1{,}5$; $y = \Delta_y/\Delta = -5/(-2) = 2{,}5$.

Задача 20. Решить с помощью правила Крамера систему уравнений: $\begin{cases} 5x + 6y = 4, \\ 3x + 7y = 1. \end{cases}$

Пример 21. Решим с помощью правила Крамера систему уравнений: $\begin{cases} 3x + 5y = 7, \\ 6x + 10y = 1. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 0, \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 65 \neq 0.$$

Поэтому система не имеет решений.

Задача 21. Решить с помощью правила Крамера систему уравнений: $\begin{cases} 3x + 7y = 1, \\ 9x + 21y = 2. \end{cases}$

Пример 22. Решим с помощью правила Крамера систему уравнений: $\begin{cases} 3x + 5y = 4, \\ 9x + 15y = 12. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 15 \end{vmatrix} = 0, \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 12 & 15 \end{vmatrix} = 0, \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому система имеет бесконечно много решений.

Разделив коэффициенты 2-го уравнения на 3, получим:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 4, \\ 3x + 5y = 4. \end{cases}$$

Оставим только одно из этих уравнений: $3x + 5y = 4$. Выразим y через x: $y = (4 - 3x)/5$, значение x — любое. Это и есть ответ.

Задача 22. Решить с помощью правила Крамера систему уравнений: $\begin{cases} 3x + 7y = 1, \\ 12x + 28y = 4. \end{cases}$

§ 4.2.2. Случай n = 3

Рассматривается система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Вычисляются определители: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

1. Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение $x = \Delta_x/\Delta$, $y = \Delta_y/\Delta$, $z = \Delta_z/\Delta$.

2. Если $\Delta = 0$, а хотя один из определителей Δ_x, Δ_y, Δ_z отличен от нуля, то система не имеет решений.

3. Если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то возможны случаи:

а) система не имеет решений;

б) система имеет бесконечно много решений.

Пример 23. Решим с помощью правила Крамера систему уравнений: $\begin{cases} x + 5y + 2z = 1, \\ 2x + 3y + 2z = -3, \\ x + 3y + 4z = -3. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -18 \neq 0.$$

Поэтому система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 36, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -18, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 18.$$

Тогда $x = \Delta_x/\Delta = 36/(-18) = -2$; $y = \Delta_y/\Delta = -18/(-18) = 1$; $z = \Delta_z/\Delta = 18/(-18) = -1$.

Задача 23. Решить с помощью правила Крамера систему уравнений: $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + 2z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5. \end{cases}$

§ 4.3. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД

Матричный метод применяется к системам, у которых число уравнений m равно числу переменных n, то есть $m = n$.

Пример 24. Вернемся к примеру 23.

Введем следующие обозначения: матрица из коэффициентов системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, столбец неизвестных $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\text{Тогда } AX = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 5y + 2z \\ 2x + 3y + 2z \\ x + 3y + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = B,$$

то есть $AX = B$ — это матричная запись нашей системы. Так как $\det A = \Delta = -18 \neq 0$, то существует A^{-1}.

Умножим слева на A^{-1} наше матричное уравнение: $A^{-1}AX = A^{-1}B$, $EX = A^{-1}B$, $X = A^{-1}B$. Мы получили формулу для нахождения решения.

Найдем A^{-1} методами, изложенными в главе 3.

$$A^{-1} = \frac{1}{-18}\begin{pmatrix} 6 & -14 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Тогда $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{-18}\begin{pmatrix} 6 & -14 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{-18}\begin{pmatrix} 6 \times 1 + (-14) \times (-3) + 4 \times (-3) \\ -6 \times 1 + 2 \times (-3) + 2 \times (-3) \\ 3 \times 1 + 2 \times (-3) + (-7) \times (-3) \end{pmatrix} = \frac{1}{-18}\begin{pmatrix} 36 \\ -18 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

то есть $x = -2$, $y = 1$, $z = -1$.

Задача 24. Решить систему уравнений из задачи 23 матричным методом.

§ 4.4. СТУПЕНЧАТЫЙ ВИД МАТРИЦЫ. РАНГ МАТРИЦЫ

Нулевая строка — это строка из одних нулей. *Ненулевая строка* содержит хотя бы один ненулевой элемент. *Главный элемент строки* — это первый слева ненулевой элемент.

Пример 25. В строке (0023549000) главный элемент равен 2.

Задача 25. В строке (0004357600) найти главный элемент.

Ступенчатый вид имеет матрица, у которой:

1) все ненулевые строки расположены выше нулевых строк;

2) в каждой строке, начиная со второй, главный элемент расположен правее, чем главный элемент предыдущей строки.

Пример 26. Приведенные ниже матрицы являются ступенчатыми (главные элементы каждой строки обведены):

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 26. Какие из следующих матриц являются ступенчатыми?

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Главные столбцы ступенчатой матрицы — это столбцы, содержащие главные элементы.

Пример 27. В примере 26 главные столбцы содержат обведенный элемент.

Задача 27. Для ступенчатых матриц из задачи 26 указать главные столбцы.

Главный ступенчатый вид матрицы — это ступенчатый вид матрицы, для которого выполнены два условия:

1) все главные элементы равны 1;

2) в главных столбцах все элементы, кроме главных, равны 0.

Пример 28. Приведенные ниже матрицы имеют главный ступенчатый вид.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 28. Какие из матриц задачи 26 имеют главный ступенчатый вид?

Всякую матрицу можно привести к главному ступенчатому виду, используя следующие преобразования (именно эти преобразования мы и использовали при вычислении определителей):

1) любые две строки можно поменять местами;

2) любую строку можно умножить на любое число, отличное от нуля;

3) к любой строке можно прибавить (из любой строки можно вычесть) любую другую строку, умноженную на любое число.

Ранг матрицы — это число ненулевых строк в ее ступенчатом виде, то есть для нахождения ранга матрицы нужно с помощью указанных выше преобразований привести матрицу к ступенчатому виду и сосчитать число ненулевых строк.

§ 4.5. МЕТОД ГАУССА

Для системы уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

составляется расширенная матрица $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

Здесь 1-й столбец — коэффициенты при x_1, 2-й столбец — коэффициенты при x_2 и т. д. Эта матрица приводится к главному ступенчатому виду. Если в процессе решения возникла ситуация, когда главный элемент расположен за вертикальной чертой, то такая система уравнений не имеет решений.

Нулевые строки будем просто вычеркивать. Главным столбцам соответствуют *главные переменные*. Остальные переменные называются *свободными*.

Если свободных переменных нет, то решение единственно. Если свободные переменные есть, то решений бесконечно много и нужно главные переменные выразить через свободные переменные.

Пример 29. Решим методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

Мы видим, что число уравнений (3) меньше числа переменных (4). Поэтому правило Крамера и матричный метод применять нельзя. Составляем расширенную матрицу:

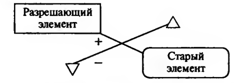
$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right).$$

Главные элементы равны 3 (1-я строка), 7 (2-я строка) и 5 (3-я строка). Мы видим, что матрица не является ступенчатой. Приведем ее к ступенчатому виду.

Из главных элементов 1-го столбца выбираем наименьший по модулю и, поменяв в случае необходимости строки, добьемся, чтобы этот элемент был расположен в левом верхнем углу матрицы. Этот

элемент назовем *разрешающим элементом*, а строку и столбец, содержащие разрешающий элемент, — *разрешающими.*

В нашем случае разрешающий элемент — это 3. Строки менять здесь не надо, элемент 3 расположен в 1-й строке. Поэтому 1-я строка не меняется. Под элементом 3 в 1-м столбце пишем одни 0. Нужно просчитать новые элементы (кроме 1-й строки и 1-го столбца) по правилу прямоугольников: новый элемент = (старый элемент) × (разрешающий элемент) – Δ × ∇.



Элемент Δ находится в разрешающей строке в одном столбце со старым элементом. Элемент ∇ находится в разрешающем столбце в одной строке со старым элементом.

Для (–4) (клетка (2,2)) новый элемент = клетка (2,2) × клетка (1,1) – – клетка (1,2) × клетка (2,1) = (–4) × 3 – (–5) × 7 = 23.

Для 7 (клетка (3,2)) новый элемент = клетка (3,2) × клетка (1,1) – – клетка (1,2) × клетка (3,1) = 7 × 3 – (–5) × 5 = 46.

Для 1 (клетка (2,3)) новый элемент = клетка (2,3) × клетка (1,1) – – клетка (1,3) × клетка (2,1) = 1 × 3 – 2 × 7 = –11. И т. д.

Получаем матрицу $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & \boxed{23} & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 46 & -22 & -38 & -1 \end{array}\right)$.

После 1-го шага отчеркнем 1-ю строку и 1-й столбец, а к оставшейся части применим алгоритм. Теперь 23 — разрешающий элемент.

Получим матрицу $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -69 \end{array}\right)$.

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$$

Мы видим, что в 3-й строке главный элемент расположен за вертикальной чертой, что соответствует уравнению $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -69$.

Система не имеет решений.

Задача 29. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5. \end{cases}$$

Пример 30. Решим систему уравнений из примера 23 методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right).$$

Умножим 2-ю строку на (-1), а 3-ю строку разделим на (-2). Получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Поменяем местами 2-ю и 3-ю строки. Получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} \quad \boxed{x} \quad \boxed{y} \quad \boxed{z} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 5 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right) \end{array}.$$

Это ступенчатый вид матрицы. Все столбцы (до черты) главные. Поэтому нет свободных переменных.

Приведем матрицу к главному ступенчатому виду. Применяем алгоритм, двигаясь от последней строки к первой. Это так называемый *обратный ход*.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} \quad x \quad y \quad z \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right) \end{array}.$$

Это главный ступенчатый вид матрицы. Получаем: $x = -2$, $y = 1$, $z = -1$.

Задача 30. Решить методом Гаусса систему уравнений из задачи 23.

Пример 31. Решим методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Составляем расширенную матрицу и поменяем местами 1-ю и 4-ю строки:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -26 & -8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -22 & -8 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -38 & -12 & -4 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 13 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 19 & 6 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Мы видим, что в отчеркнутой части главные элементы расположены в 3-м столбце. Наименьший из них равен 11. Поменяем местами 2-ю и 3-ю строки:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{11} & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 13 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 19 & 6 & 2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -28 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -35 & -60 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 12 \end{array}\right).$$

Вычтем из 4-й строки 3-ю строку:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Последняя строка соответствует уравнению $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0$, то есть $0 = 0$. Вычеркнем ее.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{x_1} & x_2 & \boxed{x_3} & \boxed{x_4} & x_5 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 7 & 12 \end{array}\right).$$

Это ступенчатый вид матрицы. Главные переменные: x_1, x_3, x_4. Свободные переменные: x_2, x_5. Система имеет бесконечно много решений.

Главные переменные нужно выразить через свободные переменные. Приведем матрицу к главному ступенчатому виду. Применим обратный ход.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 7 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 2 & 14 & 0 & -17 & -34 \\ 0 & 0 & 22 & 0 & -22 & -44 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 2 & 14 & 0 & -17 & -34 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{4} & 2 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 7 & 12 \end{array}\right).$$

Числа в каждой строке разделим на главный элемент строки:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{x_1} & x_2 & \boxed{x_3} & \boxed{x_4} & x_5 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0{,}5 & 0 & 0 & -0{,}75 & -1{,}5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3{,}5 & 6 \end{array}\right).$$

Это главный ступенчатый вид матрицы. Отсюда:

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 - 0{,}75x_5 = -1{,}5, \\ x_3 - x_5 = -2, \\ x_4 + 3{,}5x_5 = 6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1{,}5 - 0{,}5x_2 + 0{,}75x_5, \\ x_3 = -2 + x_5, \\ x_4 = 6 - 3{,}5x_5, \\ x_2, x_5 \text{ — любые.} \end{cases}$$

Задача 31. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases}$$

§ 4.6. НАХОЖДЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ МЕТОДОМ ГАУССА

Припишем к матрице A единичную матрицу E такого же порядка, что и A: $(A\,|\,E)$. Преобразованиями из метода Гаусса (§ 4.5) получим на месте A единичную матрицу E. Тогда на месте E будет A^{-1}: $(E\,|\,A^{-1})$.

Пример 32. Найдем обратную матрицу для матрицы A из примера 24.

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{18} & -3 & -2 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{18} & -3 & -2 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 18 & 90 & 0 & 24 & 4 & -14 \\ 0 & 36 & 0 & 12 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 18 & -3 & -2 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 45 & 0 & 12 & 2 & -7 \\ 0 & \boxed{9} & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 18 & -3 & -2 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 81 & 0 & 0 & -27 & 63 & -18 \\ 0 & 9 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 18 & -3 & -2 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{9} & 0 & 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & \boxed{9} & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{18} & -3 & -2 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 7/9 & -2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/9 & -1/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/9 & 7/18 \end{array}\right) = (E|A^{-1}).$$

То есть $A^{-1} = 1/18 \begin{pmatrix} -6 & 14 & -4 \\ 6 & -2 & -2 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

Задача 32. Найти обратную матрицу для матрицы A из задачи 24.

Глава 5

ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

Есть величины, которые полностью определяются заданием своих числовых значений. Например, масса, длина, площадь, объем. Это *скалярные величины.* Но есть величины, для задания которых необходимо знать еще и направление. Например, сила, скорость, ускорение. Это *векторные величины.*

Вектор $\overrightarrow{AB}$ — это направленный отрезок: A — начальная точка вектора, B — конечная точка вектора.

Также будем обозначать векторы маленькими латинскими буквами со стрелкой: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Модуль вектора $|\vec{a}|$ — это длина отрезка, изображающего вектор: $|\overrightarrow{AB}| = AB$.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ называются *противоположными.*

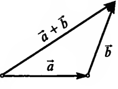
Если начальная и конечная точки вектора совпадают, то такой вектор называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$. Конечно, $|\vec{0}| = 0$.

Два вектора называются *равными*, если они имеют общее направление и одинаковые длины.

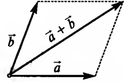
§ 5.1. ДЕЙСТВИЯ С ВЕКТОРАМИ

1. *Сложение.* Векторы можно складывать по правилам треугольника и параллелограмма.

При нахождении суммы векторов $\vec{a} + \vec{b}$ по *правилу треугольника* от конечной точки вектора $\vec{a}$ откладывают вектор $\vec{b}$. Тогда вектор $\vec{a} + \vec{b}$ направлен от начальной точки вектора $\vec{a}$ к конечной точке вектора $\vec{b}$.



При нахождении суммы векторов $\vec{a} + \vec{b}$ по *правилу параллелограмма* нужно отложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки и построить на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллелограмм. Тогда вектор-диагональ параллелограмма, выходящий из общей начальной точки векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, — это и есть вектор $\vec{a} + \vec{b}$.



2. *Умножение на число.* Если $\lambda > 0$, то нужно отложить от начальной точки вектора $\vec{a}$ в направлении вектора $\vec{a}$ вектор длины $\lambda|\vec{a}|$. Если $\lambda < 0$, то нужно отложить от начальной точки вектора $\vec{a}$ в направлении, противоположном направлению вектора $\vec{a}$, вектор длины $|\lambda||\vec{a}|$.

Пример 33. Дан вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Изобразим векторы $3\vec{a}$ и $-0,5\vec{a}$.

$-0,5\vec{a}$ $\vec{a}$ $3\vec{a}$

D A B C

$3\vec{a} = \overrightarrow{AC}$, $AC = 3AB$. $-0,5\vec{a} = \overrightarrow{AD}$, $AB = 2AD$.

Задача 33. Дан вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Изобразить векторы $4\vec{a}$ и $-2\vec{a}$.

§ 5.2. СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПРЯМОЙ

На прямой выбирается точка O — начало координат. От этой точки откладывается вектор $\vec{e}_1$ единичной длины. Он задает положительное направление и масштаб. Направление, противоположное направлению вектора $\vec{e}_1$, — это отрицательное направление. Координатам точек справа от точки O приписывается знак «+», а координатам точек слева от точки O приписывается знак «–». Координата точки A — это длина отрезка OA. Координата точки B — это длина отрезка OB, взятая со знаком «–». Положение точки на прямой определяется заданием одной координаты.

B O $\vec{e}_1$ A x

0 1

Пример 34. Изобразим на прямой точки $A(3)$, $B(-1)$, $C(2)$, $D(-2{,}5)$, $O(0)$.

D B O C A x
−2,5 −1 0 2 3

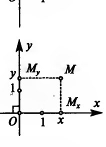
Задача 34. Изобразить на прямой точки $A(-3)$, $B(-2)$, $C(4)$, $D(1)$.

§ 5.3. ДЕКАРТОВА ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

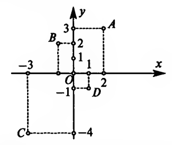
Выбираются две взаимно перпендикулярные прямые на плоскости. Точка O их пересечения — это начало координат. На каждой из прямых выбираются векторы единичной длины $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ соответственно. Первая прямая Ox — это ось абсцисс, а вторая прямая Oy — это ось ординат.

y 1 $\vec{e}_2$ $\vec{e}_1$ x O 1

Положение точки M на плоскости определяется двумя числами (координатами): абсциссой x и ординатой y. $M(x, y)$. Как определить координаты точки M? Проведем из точки M прямые, параллельные осям, до пересечения с другими осями, получим точки M_x и M_y. Используя материал § 5.2, определим x и y — координаты соответственно M_x и M_y. Это и есть координаты точки M: $M(x, y)$.



Пример 35. Изобразим на плоскости точки $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$, $C(-3, -4)$, $D(1, -1)$, $O(0, 0)$.



Задача 35. Изобразить на плоскости точки $A(-2, 1)$, $B(1, 4)$, $C(2, -1)$, $D(-1, -3)$.

§ 5.4. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ ВЕКТОРА ПРИ ОСНОВНЫХ ОПЕРАЦИЯХ

Дан вектор $\overrightarrow{AB}$. Известны координаты точек $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ вычисляются по следующему правилу. Из координат конечной точки нужно вычесть координаты начальной точки: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Пример 36. Даны точки $A(1, -2)$, $B(3, 5)$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (3 - 1, 5 - (-2)) = (2, 7)$.

Задача 36. Даны точки $A(2, 5)$, $B(-1, 8)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

При *умножении* вектора $\vec{a} = (a_1, a_2)$ на число λ его координаты умножаются на это число: $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2)$.

Пример 37. Дан вектор $\vec{a} = (1, 2)$. Тогда координаты вектора $3\vec{a} = (3 \times 1, 3 \times 2) = (3, 6)$.

Задача 37. Дан вектор $\vec{a} = (2, -4)$. Найти координаты вектора $5\vec{a}$.

При *сложении* векторов $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2)$ складываются соответствующие координаты: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

Пример 38. Даны точки $A(3, 4)$, $B(2, -3)$, $C(1, 6)$. Найдем координаты вектора $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{AB} = (2 - 3, -3 - 4) = (-1, -7)$. $\overrightarrow{CA} = (3 - 1, 4 - 6) = (2, -2)$.

Тогда $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA} = 2(-1, -7) + 3(2, -2) = (-2, -14) + (6, -6) = (-2 + 6, -14 + (-6)) = (4, -20)$.

Задача 36. Даны точки $A(4, 2)$, $B(5, -1)$, $C(3, 7)$. Найти координаты вектора $3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC}$.

§ 5.5. МОДУЛЬ ВЕКТОРА. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ

Дан вектор $\vec{a} = (a_1, a_2)$. *Модуль* вектора $\vec{a}$ вычисляется по формуле: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Пример 39. Дан вектор $\vec{a} = (1, 4)$. Тогда модуль вектора $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$.

Задача 39. Дан вектор $\vec{a} = (3, 4)$. Найти модуль этого вектора.

Известны координаты точек $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Расстояние $\rho(A, B)$ между этими точками равно длине вектора $\overrightarrow{AB}$: $\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Пример 40. Даны точки $A(2, 5)$, $B(3, 7)$. Тогда расстояние между этими точками $\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-2)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{5}$.

Задача 40. Даны точки $A(4, 7)$, $B(-1, 6)$. Найти расстояние между этими точками.

§ 5.6. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Даны векторы $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b})$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — это число, которое вычисляется по следующему правилу: $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2$ (соответствующие координаты перемножаются и полученные произведения складываются).

Пример 41. Даны векторы $\vec{a} = (2, 3)$ и $\vec{b} = (4, 7)$. Тогда скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 = 2 \times 4 + 3 \times 7 = 29$.

Задача 41. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (3, 8)$ и $\vec{b} = (-1, 4)$.

Основные свойства скалярного произведения:
1) $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$;
2) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;
3) $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$;
4) $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$;
5) $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример 42. Найдем угол между векторами $\vec{a} = (4, 3)$ и $\vec{b} = (1, 5)$. Используя свойство 5 скалярного произведения $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, находим:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{4 \times 1 + 3 \times 5}{\sqrt{4^2 + 3^2}\ \sqrt{1^2 + 5^2}} = \frac{19}{5\sqrt{26}}.$$

Задача 42. Найти угол между векторами $\vec{a} = (-1, 3)$ и $\vec{b} = (2, 7)$.

Ортогональные векторы — это векторы, угол между которыми равен 90°, то есть $\cos\varphi = 0$.

Условие ортогональности векторов. Два ненулевых вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно 0 (утверждение является верным в обоих направлениях).

Пример 43. Выясним ортогональность векторов $\vec{a} = (1, 3)$ и $\vec{b} = (-2, 4)$.

Так как $(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \times (-2) + 3 \times 4 = 10 \neq 0$, то векторы не ортогональны.

Задача 43. Выяснить ортогональность векторов $\vec{a} = (-2, 3)$ и $\vec{b} = (4, 1)$.

Глава 6

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 6.1. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЙ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Если известны точка $M(x_0, y_0)$ на прямой m и направляющий вектор $\vec{s} = (\alpha, \beta)$, параллельный этой прямой, то можно написать *каноническое уравнение* прямой m:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}.$$

Пример 44. Известны точка $M(1, 2)$ на прямой m и направляющий вектор $\vec{s} = (3, 5)$ этой прямой. Тогда каноническое уравнение прямой m: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{5}$.

Задача 44. Известны точка $M(2, 5)$ на прямой m и направляющий вектор $\vec{s} = (-1, 3)$ этой прямой. Найти каноническое уравнение прямой m.

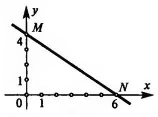
Если известен ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B)$, перпендикулярный прямой m, то можно написать *общее уравнение* прямой m: $Ax + By + C = 0$. Вектор $\vec{n}$ называется *нормалью*. Для определения константы C нужно знать какую-нибудь точку на прямой m.

Уравнение $Ax + By = 0$ задает прямую, проходящую через начало координат.

Уравнения $x = 0$ и $y = 0$ — это уравнения осей Oy и Ox соответственно. Уравнения $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ задают прямые, параллельные осям Oy и Ox соответственно.

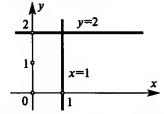
Пример 45. Изобразим прямую $2x + 3y - 12 = 0$. Для задания прямой нужно знать две ее точки. Подставим в уравнение прямой значение $x = 0$: $2 \times 0 + 3y - 12 = 0$, то есть $y = 4$. Точка $M(0, 4)$ принадлежит этой прямой. Подставим в уравнение прямой значение $y = 0$: $2x + 3 \times 0 - 12 = 0$, то есть $x = 6$. Точка $N(6, 0)$ принадлежит этой

прямой. Отметим точки M и N на координатной плоскости и проведем через них прямую.



Задача 45. Изобразить прямую $3x + 4y - 12 = 0$.

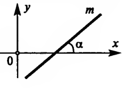
Пример 46. Изобразим прямые $x = 1$ и $y = 2$.



Задача 46. Изобразить прямые $x = -1$ и $y = 3$.

Прямая $Ax + By + C = 0$ делит плоскость на две полуплоскости. В одной из них выполнено условие $Ax + By + C > 0$, в другой — условие $Ax + By + C < 0$.

Выразив из уравнения $Ax + By + C = 0$ прямой m переменную y через переменную x, мы получим уравнение прямой в форме с угловым коэффициентом: $y = kx + b$. Угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой m к оси Ox: $k = \text{tg}\alpha$.



§ 6.2. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ

Пусть две прямые m_1 и m_2 заданы своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Тогда:

1) прямые m_1 и m_2 совпадают ($m_1 \equiv m_2$) $\Leftrightarrow A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2$;

2) прямые m_1 и m_2 параллельны ($m_1 \parallel m_2$) $\Leftrightarrow A_1/A_2 = B_1/B_2 \neq C_1/C_2$;

3) прямые m_1 и m_2 перпендикулярны ($m_1 \perp m_2$) $\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1/B_2 = 0$.

Для нахождения точки пересечения прямых m_1 и m_2 нужно решить систему уравнений: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$

Пример 47. Что можно сказать о взаимном расположении прямых $x + 2y - 3 = 0$ и $5x + 10y - 2 = 0$?
$1/5 = 2/10 \neq (-3)/(-2)$. Прямые параллельны.

Задача 47. Что можно сказать о взаимном расположении прямых $2x + 3y - 6 = 0$ и $8x + 12y + 3 = 0$?

Пример 48. Что можно сказать о взаимном расположении прямых $x + 2y - 3 = 0$ и $5x + 10y - 15 = 0$?
$1/5 = 2/10 = (-3)/(-15)$. Прямые совпадают.

Задача 48. Что можно сказать о взаимном расположении прямых $2x + 3y - 6 = 0$ и $8x + 12y - 24 = 0$?

Пример 49. Что можно сказать о взаимном расположении прямых $2x + 4y - 3 = 0$ и $-6x + 3y + 1 = 0$?
$A_1A_2 + B_1B_2 = 2 \times (-6) + 4 \times 3 = 0$. Прямые перпендикулярны.

Задача 49. Что можно сказать о взаимном расположении прямых $2x + 6y - 3 = 0$ и $9x - 3y + 4 = 0$?

Пример 50. Найдем точку пересечения прямых $2x + 5y - 9 = 0$ и $3x + 4y - 2 = 0$.

$$\begin{cases} 2x + 5y - 9 = 0, \\ 3x + 4y - 2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 9, \\ 3x + 4y = 2. \end{cases}$$

Решим эту систему по правилу Крамера (см. § 4.2).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7 \neq 0, \Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 26, \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -23.$$

Тогда $x = \Delta_x/\Delta = 26/(-7) = -26/7$, $y = \Delta_y/\Delta = -23/(-7) = 23/7$. Точка пересечения $(-26/7, 23/7)$.

Задача 50. Найти точку пересечения прямых $3x + 4y - 2 = 0$ и $5x + 7y - 9 = 0$.

§ 6.3. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ДАННЫЕ ТОЧКИ

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ имеет следующий вид: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Пример 51. Найдем уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(1, 3)$ и $M_2(4, 5)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Leftrightarrow \frac{x - 1}{4 - 1} = \frac{y - 3}{5 - 3} \Leftrightarrow \frac{x - 1}{3} = \frac{y - 3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 1) = 3(y - 3) \Leftrightarrow 2x - 3y + 7 = 0.$$

Задача 51. Найти уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(2, 5)$ и $M_2(6, 4)$.

§ 6.4. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Расстояние $\rho(M_0, m)$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой m, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$, вычисляется по формуле:

$$\rho(M_0, m) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример 52. Найдем расстояние $\rho(M_0, m)$ от точки $M_0(1, 2)$ до прямой m, заданной уравнением $3x + 4y - 7 = 0$.

$$\rho(M_0, m) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0{,}8.$$

Задача 52. Найти расстояние $\rho(M_0, m)$ от точки $M_0(2, 5)$ до прямой m, заданной уравнением $3x + 7y - 2 = 0$.

Глава 7

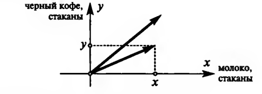
ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В данной главе мы обобщим понятие вектора, рассмотрению которого была посвящена *глава 5.*

Рассмотрим множество L чашек кофе с молоком. Введем в этом множестве операции умножения на число и сложения. Если к приготовленной порции кофе добавить точно такую же, то содержимое сосуда увеличится вдвое. Будем говорить, что мы *умножили* порцию кофе на 2. Аналогично можно определить умножение на любое положительное число.

Теперь возьмем две разные чашки кофе, приготовленного по различным рецептам, и сольем их вместе (да простят кофеманы этот кощунственный акт). Будем говорить, что мы произвели *сложение двух элементов* нашего множества. Заметим, что в результате всех этих действий мы получаем элемент нашего множества (кофе с молоком), а не компот и не кисель.

Каждой чашке кофе можно поставить в соответствие пару чисел (x, y), где x — количество молока (в стаканах) в этой чашке, а y — количество черного кофе (в стаканах) в этой чашке. Изобразим это в декартовой системе координат.



Соединив точки с началом координат, мы получим те объекты, с которыми уже хорошо знакомы, — векторы. А введенные нами операции во множестве чашек кофе — это умножение вектора на число и сложение векторов (например, по правилу параллелограмма).

Но интерпретация векторов на языке чашек кофе с молоком поможет нам лучше изучить свойства операций над векторами. При

объединении содержимого двух чашек кофе мы получаем элемент нашего множества (кофе с молоком), а не компот и не кисель. На математическом языке это звучит так.

Аксиома 1. $x + y$ лежит в L для любых x, y из L.

Можно добавить содержимое 2-й чашки к 1-й, а можно добавить содержимое 1-й чашки ко 2-й. Результат от этого не изменится.

$$\boxed{1} + \boxed{2} = \boxed{2} + \boxed{1}$$

Аксиома 2. $x + y = y + x$ для любых x, y из L.

Эта аксиома выполняется не для всякого множества, в котором введена операция сложения. Заменим кофе и молоко на воду и концентрированную серную кислоту. Тогда $H_2O + H_2SO_4$ = раствор серной кислоты, а $H_2SO_4 + H_2O$ = опасность!

При сложении векторы можно объединять в любые группы. Можно объединить сначала содержимое 1-й и 2-й чашек кофе, а затем добавить содержимое 3-й чашки кофе. А можно объединить сначала содержимое 3-й и 2-й чашек кофе и добавить все это к содержимому 1-й чашки кофе. Результат от этого не изменится.

$$(\boxed{1} + \boxed{2}) + \boxed{3} = \boxed{1} + (\boxed{2} + \boxed{3})$$

Аксиома 3. $(x + y) + z = x + (y + z)$ для любых x, y, z из L.

Эта аксиома выполняется не для всякого множества, в котором введена операция сложения. Для приготовления водного раствора кристаллического йода сначала нужно йод растворить в спирте, а затем полученный раствор разбавить водой: $H_2O + (J_2 + C_2H_5OH)$ = раствор. При изменении порядка сложения результат будет другим: с водой йод образует взвесь, которая не превратится в раствор при добавлении спирта. $(H_2O + J_2) + C_2H_5OH$ = взвесь.

В нашем множестве чашек кофе с молоком есть особый элемент (пустая чашка), прибавление которого к любой другой чашке кофе с молоком не влияет на содержимое чашки кофе.

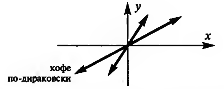
Аксиома 4. Во множестве L существует нулевой элемент 0 такой, что $x + 0 = x$ для любого x из L.

Английскому физику Полю Дираку однажды предложили шуточную задачу на смекалку. Три рыбака ловили рыбу. Ловля закончилась затемно, и рыбаки решили разделить добычу утром при свете дня. Один рыбак проснулся раньше других и решил, не будя остальных,

взять причитающуюся ему треть улова и уйти. Число рыб на 3 не делилось. Рыбак выкинул одну рыбу и, забрав треть улова, ушел. Затем проснулся другой рыбак и, ничего не подозревая, принялся вновь делить добычу на 3 части. Число рыб на 3 не делилось. Рыбак выкинул одну рыбу и, забрав треть улова, ушел. Последний рыбак поступил так же, как и предыдущий. Какое минимальное число рыб поймали рыбаки?

Легко проверить, что ответ задачи 25. Но Дирак дал другой и, как ни странно, правильный ответ: -2. С точки зрения математики Дирак прав ($-2 < 25$ и -2 подходит, $-2 - 1 = -3$, $-3/3 = -1$, $-3 - (-1) = -2$ и т. д.).

Конечно, ответ Дирака не имеет физического смысла. Но для нас ценен то факт, что Дирак не делает различия между положительными и отрицательными числами. И мы не будем делать различия между положительными и отрицательными числами при определении умножения на числа. Появляются отрицательные чашки кофе — кофе по-дираковски.



Из физики известно, что две взаимно противоположные силы при сложении дают нулевую силу. Для всякой силы можно подобрать противоположную силу.

Аксиома 5. Для всякого x из множества L существует противоположный элемент $-x$ такой, что $x + (-x) = 0$.

Аксиома 6. Во множестве L введена операция умножения на числа такая, что для всякого x из множества L и для любого числа λ элемент λx лежит в L.

Сформулируем и другие аксиомы.

Аксиома 7. $1 \times x = x$ для всякого x из множества L.

Аксиома 8. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ для всякого x из множества L и любых чисел α, β.

Аксиома 9. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ для любых x, y из множества L и любого числа α.

Аксиома 10. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ для всякого x из множества L и любых чисел α, β.

Множество L, в котором введены две операции, удовлетворяющие аксиомам 1—10, называется *линейным (векторным) пространством.* Элементы линейного пространства называются *векторами.*

Пример 53. Множество всех чашек кофе с молоком, в котором введены выше операции сложения и умножения на числа, является линейным (векторным) пространством.

Пример 54. Множество всех векторов на плоскости с операциями сложения и умножения на числа является линейным пространством. Нулевой элемент — это нулевой вектор.

Пример 55. Множество всех целых чисел $(0, \pm 1, \pm 2, ...)$ не является линейным пространством, так как $0{,}5 \times 1 = 0{,}5$ — не есть целое число (не выполняется аксиома 6).

Пример 56. Множество всех векторов на оси Ox с операциями сложения и умножения на числа является линейным пространством.

Пример 57. Множество всех квадратных матриц 2-го порядка с обычными операциями сложения и умножения на числа является линейным пространством. Нулевой элемент — это нулевая матрица 2-го порядка.

Задача 53. Привести пример линейного пространства.

Задача 54. Привести пример множества с двумя операциями («сложение» и «умножение на числа»), которое не является линейным пространством.

Рассмотрим множество L упорядоченных наборов из n действительных чисел, то есть множество L состоит из элементов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Элемент x называется *n-мерным вектором.*

Введем операции сложения $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ и умножения на число $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$ для всех $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ из множества L и любого числа α. Такое множество L будем обозначать R^n.

Задача 55. Показать, что R^n является линейным пространством, то есть проверить выполнение аксиом 1—10.

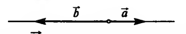
§ 7.1. ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫЕ И ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ. БАЗИС

Рассмотрим линейное пространство L. Выберем векторы $x_1, x_2, ..., x_n$ в пространстве L и рассмотрим их *линейную комбинацию* — выражение вида $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ — какие-то числа. Это будет некоторый вектор из пространства L. Нас интересует случай, когда этот вектор нулевой, то есть можно ли так подобрать числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, чтобы $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$ (нулевой вектор).

Один ответ очевиден: все $\alpha_i = 0$. Если других вариантов нет, то векторы $x_1, x_2, ..., x_n$ называются *линейно независимыми*.

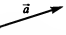
Если можно подобрать числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, где хотя бы одно $\alpha_i \neq 0$ и $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$, то векторы $x_1, x_2, ..., x_n$ называются *линейно зависимыми*.

Пример 58.



$2|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $2\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы.

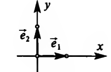
Пример 59.



Вектор $\vec{a}$ линейно независим, так как равенство $\alpha\vec{a} = \vec{0}$ возможно лишь при $\alpha = 0$.

Пример 60. $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (-3, -6, -9)$. $3x_1 + x_2 = (0, 0, 0)$. Векторы x_1, x_2 линейно зависимы.

Пример 61.



Векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ линейно независимы, так как равенство $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 = \vec{0}$ возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Задача 56. Привести пример линейно независимых векторов.

Задача 57. Привести пример линейно зависимых векторов.

Если $v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$, то говорят, что вектор v *линейно выражается* через векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейного пространства L называется *базисом*, если:

1) векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно независимы;

2) любой вектор v из пространства L линейно выражается через векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$).

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются *координатами вектора* v в базисе $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Конечно, в линейном пространстве L очень много всевозможных базисов. Но все базисы содержат одинаковое число элементов. Это число называется *размерностью линейного пространства* L и обозначается $\dim L$.

Пример 62. Цветное телевидение избрало в качестве базисных зеленый, красный и синий цвета, то есть оно трехмерно.

Пример 63. В полиграфии для цветной печати используют голубую, пурпурную, желтую и черную краски, то есть цветная полиграфия четырехмерна.

Пример 64. В «кофейном» пространстве за стандартную основу приняты стакан черного кофе и стакан молока, то есть «кофейное» пространство двумерно.

Пример 65. Любой кулинарный рецепт — это разложение по базису.

Пример 66. Множество векторов на плоскости двумерно. Базис образуют векторы $\vec{e}_1 = (1, 0)$ и $\vec{e}_2 = (0, 1)$.

Пример 67. Пространство R^n n-мерно. Векторы $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ образуют базис.

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$, то есть любой вектор x из пространства R^n линейно выражается через векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Проверим линейную независимость векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = 0 = (0, 0, \ldots, 0) \Leftrightarrow \alpha_1(1, 0, \ldots, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + \alpha_n(0, 0, \ldots, 1) = (0, 0, \ldots, 0) \Leftrightarrow (\alpha_1, 0, \ldots, 0) + (0, \alpha_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0) \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0)$.

Отсюда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Задача 58. Привести пример базиса.

Пример 68. Исследуем на линейную зависимость систему векторов $x_1 = (5, 4, 3)$, $x_2 = (3, 3, 2)$, $x_3 = (8, 1, 3)$.

Имеем: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 = (0, 0, 0)$.

Распишем это векторное равенство для каждой из координат.

$$\begin{cases} 5\alpha_1 + 3\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0, \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 8 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -27 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -7\alpha_3, \\ \alpha_2 = 9\alpha_3, \\ \alpha_3 \text{ любое.} \end{cases} \Rightarrow \text{Система векторов линейно зависима.}$$

Задача 59. Исследовать на линейную зависимость систему векторов $x_1 = (2, -3, 1)$, $x_2 = (3, -1, 5)$, $x_3 = (1, -4, 3)$.

Важным является следующий критерий линейной зависимости: векторы $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$ линейно зависимы

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 69. В примере 68 определитель $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

Теорема. Ненулевые векторы $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ линейно зависимы $\Leftrightarrow a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$.

Пример 70. Векторы $a = (1, 2, 3)$ и $b = (3, 6, 9)$ линейно зависимы, так как $1/3 = 2/6 = 3/9$.

Задача 60. Исследовать на линейную зависимость векторы $a = (5, 4, 3)$ и $b = (25, 20, 15)$.

Глава 8

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Оператор — это отображение f линейного пространства L в себя, то есть f: $L \to L$. Оператор f называется *линейным*, если выполнены следующие два условия:

1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для всех x, y из L;

2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ для всех x из L и любого числа α.

Рассмотрим случай $L = R^n$. Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ — базис пространства R^n.

Матрица следующего вида $A = (f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ (координаты векторов $f(e_i)$ в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ записаны в виде столбцов) называется *матрицей линейного оператора* f в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$.

Если рассмотреть другой базис $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ пространства R^n, то у оператора f в этом базисе будет матрица $A' = T^{-1}AT$, где T — *матрица перехода* от базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ к базису $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ (координаты векторов $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ записаны в виде столбцов).

Пример 71. Оператор f переводит вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $f(x) = (x_1 + x_2, x_2, 2x_1 - x_2 + 3x_3)$. Покажем, что f — линейный оператор, и найдем его матрицу.

$f(x) = (x_1 + x_2, x_2, 2x_1 - x_2 + 3x_3)$.

$y = (y_1, y_2, y_3), f(y) = (y_1 + y_2, y_2, 2y_1 - y_2 + 3y_3)$.

$f(x) + f(y) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_2 + y_2, 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2y_1 - y_2 + 3y_3)$.

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$,

$f(x + y) = (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, x_2 + y_2, 2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3))$.

Мы видим, что $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$,

$f(\alpha x) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_2, 2\alpha x_1 - \alpha x_2 + 3\alpha x_3)$.

$\alpha f(x) = \alpha(x_1 + x_2, x_2, 2x_1 - x_2 + 3x_3) = (\alpha(x_1 + x_2), \alpha x_2, \alpha(2x_1 - x_2 + 3x_3))$.

Мы видим, что $f(\alpha x) = \alpha f(x)$. Оба свойства выполнены. Поэтому f — линейный оператор.

Какова его матрица? Найдем образы базисных векторов $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ под действием оператора f.

$f(e_1) = (1 + 0, 0, 2 \times 1 - 0 + 3 \times 0) = (1, 0, 2)$.

$f(e_2) = (0 + 1, 1, 2 \times 0 - 1 + 3 \times 0) = (1, 1, -1)$.

$f(e_3) = (0 + 0, 0, 2 \times 0 - 0 + 3 \times 1) = (0, 0, 3)$.

Запишем полученные координаты в виде столбцов матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Это и есть матрица линейного оператора f в базисе e_1, e_2, e_3.

Задача 61. Оператор f переводит вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $f(x) = (2x_1 - x_2, x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$. Показать, что f — линейный оператор, и найти его матрицу.

Пример 72. Оператор f переводит вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $f(x) = (x_1 + 1, x_2, x_3)$. Определим, является ли f линейным оператором.

$f(x) = (x_1 + 1, x_2, x_3)$.

$y = (y_1, y_2, y_3), f(y) = (y_1 + 1, y_2, y_3)$.

$f(x) + f(y) = (x_1 + 1 + y_1 + 1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$.

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$,

$f(x + y) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$.

Мы видим, что $f(x + y) \neq f(x) + f(y)$. Поэтому f не является линейным оператором.

Задача 62. Оператор f переводит вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $f(x) = (x_1, x_2 + 2, x_3)$. Определить, является ли f линейным оператором.

Пример 73. Дана матрица линейного оператора $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ в базисе $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0,1)$. Найдем матрицу этого линейного оператора в базисе $e'_1 = (5, 3)$, $e'_2 = (2, 1)$.

$e'_1 = 5e_1 + 3e_2$, $e'_2 = 2e_1 + e_2$. Матрица перехода состоит из записанных в столбцы координат векторов e'_1, e'_2 в базисе e_1, e_2: $T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда матрица линейного оператора в базисе e'_1, e'_2 вычисляется по формуле $A' = T^{-1}AT$.

$$T^{-1} = \frac{1}{5 \times 1 - 2 \times 3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \text{ (см. § 3.2).}$$

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 16 \\ -102 & -38 \end{pmatrix}.$$

(перемножать матрицы можно в любой последовательности, не меняя порядка множителей).

Задача 63. Дана матрица линейного оператора $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ в базисе $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0,1)$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $e'_1 = (1, 2)$, $e'_2 = (2, 5)$.

Глава 9

МНОГОЧЛЕНЫ

Функция вида $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где $a_n \neq 0$, называется *многочленом степени n*.

Пример 74. $5x^4 + 2x + 1$ — это многочлен четвертой степени. $2x^5 + 6x^8 - x^2 + 3$ — это многочлен восьмой степени.

Задача 64. Определить степень многочлена $2x^3 + 4x^6 + x^5 + x + 3x^2 + 2$.

§ 9.1. ДЕЙСТВИЯ С МНОГОЧЛЕНАМИ

1. *Сложение.* При одинаковых степенях коэффициенты суммируются.

Пример 75. Найдем сумму многочленов $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ и $q(x) = 7x^3 - 3x^2 - 9$.

$p(x) + q(x) = (2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) + (7x^3 - 3x^2 - 9) = (2 + 7)x^3 + (3 + (-3))x^2 - 4x + (5 + (-9)) = 9x^3 - 4x - 4.$

Задача 65. Найти сумму многочленов $p(x) = 4x^3 + 8x^2 - 5x + 9$ и $q(x) = 10x^3 - 13x^2 + 18x - 6$.

2. *Умножение.* При умножении многочлена $p(x)$ на многочлен $q(x)$ просто раскрывают скобки, руководствуясь правилом $Ax^n \times Bx^m = (A \times B)x^{n+m}$, и приводят подобные слагаемые.

Пример 76. Найдем произведение многочленов $p(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x + 3$ и $q(x) = 7x^2 + 6$.

$p(x)q(x) = (2x^3 + 5x^2 + 4x + 3)(7x^2 + 6) = 14x^5 + 35x^4 + 28x^3 + 21x^2 + 12x^3 + 30x^2 + 24x + 18 = 14x^5 + 35x^4 + 40x^3 + 51x^2 + 24x + 18.$

Задача 66. Найти произведение многочленов $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5$ и $q(x) = 2x^2 + 7x + 1$.

3. *Деление с остатком.* Для любых многочленов $p(x)$ и $q(x)$ можно так подобрать многочлены $m(x)$ (частное) и $r(x)$ (остаток), что $p(x) = m(x)q(x) + r(x)$, причем степень остатка $r(x)$ меньше степени многочлена $q(x)$.

Обычно деление с остатком производят «столбиком». Если остаток равен нулю, то говорят, что многочлен $p(x)$ делится на многочлен $q(x)$.

Пример 77. Разделить с остатком многочлен $p(x) = 2x^5 - 2x^4 - 18x^3 + 28x^2 + 20x + 7$ на $q(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2x^5 - & 2x^4 - & 18x^3 & + 28x^2 & + 20x & + 7 & x^3 - 3x^2 + 2 \\
\underline{2x^5 -} & \underline{6x^4 +} & & \underline{4x^2} & & & \overline{2x^2 + 4x - 6} \\
 & 4x^4 & - 18x^3 & + 24x^2 & + 20x & + 7 & \\
 & \underline{4x^4} & \underline{- 12x^3 +} & & \underline{8x} & & \\
 & & -6x^3 & + 24x^2 & + 12x & + 7 & \\
 & & \underline{-6x^3} & \underline{+ 18x^2} & & \underline{- 12} & \\
 & & & 6x^2 & + 12x & + 19 &
\end{array}$$

$p(x) = (2x^2 + 4x - 6)q(x) + (6x^2 + 12x + 19)$. Каждый раз нужно умножать $q(x)$ на множитель вида ax^k, подобранный так, чтобы после выполнения вычитания степень вновь полученного многочлена понизилась.

Задача 67. Разделить с остатком многочлен $p(x) = 12x^5 - 14x^4 + 22x^3 - 4x^2 - 4x + 3$ на $q(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$.

§ 9.2. СХЕМА ГОРНЕРА

Схема Горнера позволяет быстро разделить с остатком любой многочлен $p(x)$ на многочлен вида $x - c$ ($c = \text{const}$).

Пример 78. Использование схемы Горнера рассмотрим на примере многочленов $p(x) = 4x^3 + 3x^2 + x + 5$ и $x - 2$. Составляем таблицу.

	4	3	1	5
2	4	$3 + 4 \times 2 = 11$	$1 + 11 \times 2 = 23$	$5 + 23 \times 2 = 51$

В 1-й строке записаны коэффициенты многочлена $p(x)$ в порядке убывания степеней, а во 2-й строке перед чертой — константа $c = 2$.

2-й строка заполняется слева направо. Переписываем число сверху и к нему прибавляем число слева (во 2-й строке), умноженное на число за чертой (то есть на 2).

Во 2-й строке получены коэффициенты частного в порядке убывания степеней, причем степень многочлена-частного на 1 меньше степени многочлена $p(x)$. В последней клетке 2-й строки указан остаток.

$4x^3 + 3x^2 + x + 5 = (x - 2)(4x^2 + 11x + 23) + 51.$

Задача 68. Применить схему Горнера к многочленам $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ и $x - 5$.

Если остаток равен нулю, то $p(x) = (x - c)m(x)$. В этом случае $p(c) = 0$. Говорят, что $x = c$ является *корнем многочлена* $p(x)$.

Целые корни многочлена $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами a_i могут быть только среди делителей коэффициента a_0.

Если $p(x) = (x - c)^k m(x)$, где $m(c) \neq 0$, то говорят, что $x = c$ является *корнем кратности* k многочлена $p(x)$.

Глава 10

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

Если при действии линейного оператора f на ненулевой вектор x получается тот же вектор x, умноженный на какое-то число λ, то такой вектор x называется *собственным вектором* линейного оператора f: $f(x) = \lambda x$. Число λ называется *собственным значением.*

§ 10.1. НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В матрице A порядка n линейного оператора f на главной диагонали вычитается число λ. Определитель полученной матрицы приравнивается нулю, то есть $\det(A - \lambda E) = 0$. Это *характеристическое уравнение.* Его решения и есть собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$.

Для каждого λ_i решается однородная система $(A - \lambda_i E)X = 0$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выражаем главные переменные через свободные переменные и *методом бегущей единицы* (поочередно одну свободную переменную приравниваем единице, остальные свободные переменные приравниваем нулю, находим значения главных переменных) получаем все собственные векторы, соответствующие собственному значению λ_i.

Пример 79. Найдем собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \times (2-\lambda) - 4 \times 5 = \lambda^2 - 5\lambda -$$

$- 14 = 0$. Собственные значения: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 7$. Найдем собственные векторы.

$\lambda_1 = -2$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 3-(-2) & 4 \\ 5 & 2-(-2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся методом Гаусса.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ (\ 1 \quad 0{,}8 \mid 0) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -0{,}8x_2, \\ x_2 \text{ любое.} \end{cases}$$

У нас одна свободная переменная x_2. Приравняем ее единице и найдем соответствующее значение главной переменной x_1: $x_2 = 1$, $x_1 = -0{,}8$. $X_{\lambda_1} = X_{-2} = (-0{,}8; 1)$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -2$.

Пусть теперь $\lambda_2 = 7$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 3-7 & 4 \\ 5 & 2-7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Применим метод Гаусса.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ (\ 1 \quad -1 \mid 0) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_2 \text{ любое.} \end{cases}$$

У нас одна свободная переменная x_2. Приравняем ее единице и найдем соответствующее значение главной переменной x_1: $x_2 = 1$, $x_1 = 1$. $X_{\lambda_2} = X_7 = (1; 1)$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 7$.

Задача 69. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Пример 80. Найдем собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (7-\lambda)(-19-\lambda)(13-\lambda) + 12 \times (-12) \times 10 + 6 \times (-24) \times 10 -$$
$$- 6 \times (-19-\lambda) \times 12 - 10 \times (7-\lambda) \times (-24) - 10 \times (13-\lambda) \times (-12) =$$
$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0, \text{ то есть } \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Целые корни могут быть только среди делителей свободного члена 1, то есть среди ±1. Применим три раза схему Горнера.

	1	−1	−1	1
1	1	0	−1	0
1	1	1	0	
−1	1	0		

$\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = -1$. Это собственные значения. Найдем собственные векторы.

$$\lambda_{1,2} = 1. \text{ Тогда } \begin{pmatrix} 7-1 & -12 & 6 \\ 10 & -19-1 & 10 \\ 12 & -24 & 13-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ Воспользуемся методом Гаусса.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 12 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 - x_3, \\ x_2, x_3 \text{ любые.} \end{cases}$$

У нас две свободные переменные (x_2 и x_3). Применим метод бегущей единицы (поочередно одну свободную переменную приравниваем единице, другую свободную переменную приравниваем нулю и находим соответствующее значение главной переменной).

$$\begin{cases} x_1 = 2 \times 1 - 0 = 2, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 2 \times 0 - 1 = -1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

$X^{(1)}_{\lambda_{1,2}} = X^{(1)}_1 = (2, 1, 0)$ и $X^{(2)}_{\lambda_{1,2}} = X^{(2)}_1 = (-1, 0, 1)$ — собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_{1,2} = 1$.

$$\lambda_3 = -1. \text{ Тогда } \begin{pmatrix} 7-(-1) & -12 & 6 \\ 10 & -19-(-1) & 10 \\ 12 & -24 & 13-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ Применим метод Гаусса.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 8 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -18 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 14 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 3 & 0 \\ 5 & -9 & 5 & 0 \\ 6 & -12 & 7 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & -12 & 10 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 0 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & -5/6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0{,}5x_3, \\ x_2 = 5/6x_3, \\ x_3 \text{ любое.} \end{cases}$$

У нас одна свободная переменная x_3. Приравниваем ее единице и находим соответствующие значения главных переменных:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}5, \\ x_2 = 5/6, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

$X_{\lambda_3} = X_{-1} = (0{,}5;\ 5/6;\ 1)$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = -1$.

Задача 70. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Глава 11

ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Линейное пространство L называется *евклидовым пространством*, если на нем задана функция двух переменных (x, y) — скалярное произведение, для которого выполнены следующие свойства (x, y, z — любые векторы из L, α — любое число):

1) $(x, y) = (y, x)$;
2) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;
3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;
4) $(x, x) \geqslant 0$ и $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (нулевой вектор пространства L).

Пример 81. Пространство $R^n = \{x = (x_1, ..., x_n)\}$ является евклидовым пространством. Скалярное произведение задается формулой $(x, y) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$, где $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$.

Задача 71. Показать, что в примере 81 выполнены все четыре свойства скалярного произведения.

Задача 72. Привести пример евклидова пространства.

Длина вектора x — это число $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Пример 82. Длина вектора $x = (1, -2, 3, 4)$ равна $|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}$.

Задача 73. Найти длину вектора $x = (5, 1, 2, 3)$.

Неравенство Коши-Буняковского: $|(x, y)| \leqslant |x||y|$.
Неравенство треугольника: $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Угол φ, для которого $\cos\varphi = \dfrac{(x, y)}{|x||y|}$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$, называется *углом между векторами* x, y.

Пример 83. Найдем угол между векторами $x = (1, 0, -1, 2)$ и $y = (2, 3, 5, 4)$.

$(x, y) = 1 \times 2 + 0 \times 3 + (-1) \times 5 + 2 \times 4 = 5.$

$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}.$

$|y| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|} = \frac{5}{\sqrt{6} \times 3\sqrt{6}} = 5/18.$$

Задача 74. Найти угол между векторами $x = (2, 0, -1, 3)$ и $y = (1, 2, -4, 5)$.

Векторы x, y, скалярное произведение которых равно нулю ($(x, y) = 0$), называются *ортогональными* ($x \perp y$).

Пример 84. Векторы x, y из примера 83 не являются ортогональными, так как $(x, y) = 5 \neq 0$.

Задача 75. Определить, ортогональны ли векторы x, y из задачи 74.

Ортогональный базис евклидова пространства L — это базис пространства L, в котором все базисные векторы попарно ортогональны, то есть скалярное произведение любых двух векторов базиса равно нулю.

Ортонормированный базис евклидова пространства L — это ортогональный базис, в котором длина любого базисного вектора равна единице.

Ответы

1. Во 2-й строке и в 4-м столбце.

2. Например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

3. Например, $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 10 & 25 & 35 \\ 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 40 & 35 & 15 \\ 9 & 14 & 26 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} -20 & -1 & 11 \\ 7 & 4 & -12 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 11 & 15 & 3 \\ 12 & 4 & 7 \\ 13 & 6 & 8 \\ 14 & 19 & 9 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 48 & 24 \\ 128 & 64 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 12 & 20 & 16 \\ 30 & 42 & 36 \\ 57 & 59 & 58 \end{pmatrix}$.

11. -13.

12. -3.

13. -2; 13; 2.

14. 17; -1; -5.

15. $3\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$; $-4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$;

$2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$.

16. -9.

17. 18.

18. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$.

19. $\begin{bmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

20. $x = 22/17$, $y = -7/17$.

21. Нет решений.

22. $y = (1 - 3x)/7$, x любое.

23. $x = 22{,}6$; $y = 11$; $z = -8{,}4$.

25. 4.

26. 2-я, 4-я и 5-я.

27. 2-я (1-й столбец), 4-я (1-й столбец) и 5-я (2-й и 3-й столбцы).

28. 4-я и 5-я.

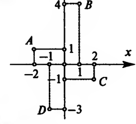
29. Нет решений.

31. $\begin{cases} x_1 = -15/4 - 2x_2 + 0{,}5x_3, \\ x_3 = -3/4 + 0{,}5x_5, \\ x_4 = -5 + x_5, \\ x_2, x_5 \text{ — любые.} \end{cases}$

32. $0{,}1\begin{bmatrix} 9 & -20 & 13 \\ 5 & -10 & 5 \\ -1 & 10 & 7 \end{bmatrix}$.

34. A, B, D, C на оси x: A = −3, B = −2, 0, D = 1, C = 4

35.



36. $(-3, 3)$.

37. $(10, -20)$.

38. $(-4, 14)$.

39. 5.

40. $\sqrt{26}$.

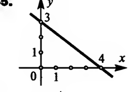
41. 29.

42. $19/\sqrt{530}$.

43. Нет.

44. $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-5}{3}$.

45.



46.

47. Параллельны.

48. Совпадают.

49. Перпендикулярны.

50. $(-22, 17)$.

51. $x + 4y - 22 = 0$.

52. $39/\sqrt{58}$.

55. Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$. Тогда $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ и $y + x = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, ..., y_n + x_n)$, то есть $x + y = y + x$. Аналогично проверяется выполнение и других аксиом.

59. Линейно независимы.

60. Линейно зависимы.

61. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

62. Не является линейным оператором.

63. $\begin{pmatrix} 60 & 141 \\ -23 & -54 \end{pmatrix}$.

64. 6.

65. $14x^3 - 21x^2 + 13x + 3$.

66. $6x^5 + 13x^4 - 25x^3 + 6x^2 + 35x + 5$.

67. $p(x) = (4x^2 - 2x + 6)q(x) + (4x^2 - 2x - 3)$.

68. $2x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = (x - 5)(2x^2 + 13x + 61) + 306$.

69. 1 и 3; $X_1 = (-1, 1)$, $X_3 = (1, 1)$.

70. 2; $X_2^{(1)} = (1/2, 1, 0)$, $X_2^{(2)} = (0, 0, 1)$.

71. Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$. Тогда $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ и $(y, x) = y_1x_1 + y_2x_2 + ... + + y_nx_n$, то есть $(x, y) = (y, x)$. Аналогично проверяется выполнение и других свойств.

73. $\sqrt{39}$.

74. $\dfrac{21}{\sqrt{14} \times \sqrt{46}}$.

75. Нет.

Программа учебного курса «Линейная алгебра и геометрия»

1. Матрнцы (прямоугольная, квадратная, еднннчная, нулевая). Действия с матрнцами (умножение на чнсло, сложенне, вычнтанне, транспоннрованне, умножение). Свойства действнй с матрицами.
2. Определителн второго н третьего порядков.
3. Алгебраические дополнения н мнноры. Разложенне определнтеля по строке илн столбцу.
4. Свойства определителей.
5. Вычнсленне определнтелей порядка n.
6. Невырожденная матрнца. Обратная матрнца. Алгоритм нахождения обратной матрнцы. Свойства обратной матрнцы.
7. Нахожденне обратной матрнцы для матрицы второго порядка.
8. Нахожденне обратной матрнцы для матрнцы третьего порядка.
9. Снстемы лннейных уравненнй (совместная, несовместная, определениая, однородная, неоднородная).
10. Правило Крамера ($n = 2$).
11. Правило Крамера ($n = 3$).
12. Матричный метод решения снстем лннейных уравненнй.
13. Главный элемент строки, ступенчатый вид матрнцы, главные столбцы, главный ступенчатый вид матрнцы. Прнведение матрицы к главному ступенчатому виду. Ранг матрнцы.
14. Метод Гаусса.
15. Нахождение обратной матрнцы методом Гаусса.
16. Векторы на плоскости. Нулевой вектор, противоположные векторы, равные векторы. Действия с векторамн (сложенне (правила треугольннка н параллелограмма), умноженне на чнсло).
17. Снстема координат на прямой.
18. Декартова прямоугольная снстема коордннат на плоскости.
19. Координаты вектора. Преобразованне координат вектора при основных операциях.
20. Модуль вектора. Расстояние между двумя точками.
21. Скалярное пронзведенне векторов. Основные свойства скалярного пронзведения. Угол между векторами. Условне ортогональности векторов.
22. Прямая на плоскости. Различные виды уравнений прямой на плоскости (каноническое, общее, с угловым коэффнцнентом).
23. Взаимное расположенне прямых на плоскости (параллельность, совпаденне, перпендикулярность, нахождение точки пересечения).

24. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

25. Расстояние от точки до прямой.

26. Линейные пространства.

27. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базис. Условие линейной зависимости трех векторов в пространстве R^3. Условие линейной зависимости двух векторов в пространстве R^3.

28. Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Матрица перехода. Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах.

29. Многочлены, степень многочлена. Действия с многочленами (сложение, умножение, деление с остатком).

30. Схема Горнера.

31. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Нахождение собственных векторов и собственных значений. Характеристический многочлен.

32. Евклидовы пространства. Скалярное произведение. Длина вектора. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника. Угол между векторами. Ортогональный и ортонормированный базисы.

Задачи для контрольной работы по курсу «Линейная алгебра и геометрия»

1–10. Для матриц $A = \begin{pmatrix} k & m \\ l & n \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ найти сумму $A + B$, разность $A - B$, произведения AB и BA, определители, транспонированные и обратные матрицы.

	k	*l*	*m*	*n*	*p*	*q*	*r*	*s*
1	9	7	3	2	5	3	7	6
2	3	7	5	4	2	4	8	5
3	8	4	2	6	8	9	5	3
4	9	1	2	5	2	9	3	7
5	1	2	8	7	9	7	8	1
6	6	5	7	4	7	1	3	2
7	3	6	1	8	5	4	7	1
8	8	5	2	6	9	7	6	2
9	6	3	5	7	3	2	5	7
10	7	3	9	6	4	5	7	3

11–20. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} k & n & r \\ l & p & s \\ m & q & t \end{pmatrix}$ вычислить определитель и найти обратную матрицу.

	k	*l*	*m*	*n*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*
11	9	7	3	2	5	3	7	6	7
12	3	7	5	4	2	4	8	5	3
13	8	4	2	6	8	9	5	3	6
14	9	1	2	5	2	9	3	7	3
15	1	2	8	7	9	7	8	1	6
16	6	5	7	4	7	1	3	2	7
17	3	6	1	8	5	4	7	1	4
18	8	5	2	6	9	7	6	2	8
19	6	3	5	7	3	2	5	7	9
20	7	3	9	6	4	5	7	3	7

21–30. Решить систему уравнений $\begin{cases} kx + ly = m, \\ nx + py = q. \end{cases}$

а) с помощью правила Крамера;
б) матричным методом;
в) методом Гаусса.

	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
k	9	3	8	9	1	6	3	8	6	7
l	7	7	4	1	2	5	6	5	3	3
m	3	5	2	2	8	7	1	2	5	9
n	2	4	6	5	7	4	8	6	7	6
p	5	2	8	2	9	7	5	9	3	4
q	3	4	9	9	7	1	4	7	5	2

31–40. Решить систему уравнений $\begin{cases} kx + ly + mz = n, \\ px + qy + rz = s, \\ tx + fy + gz = h. \end{cases}$

а) с помощью правила Крамера;
б) матричным методом;
в) методом Гаусса.

	k	*l*	*m*	*n*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*f*	*g*	*h*
31	1	1	1	0	2	1	0	4	1	–1	–2	5
32	1	1	–1	–4	2	3	1	–1	1	–1	2	6
33	2	1	1	3	5	–2	3	0	1	0	2	5
34	1	1	–1	0	2	3	–2	2	3	–2	0	1
35	1	1	1	4	2	1	3	9	3	3	–1	0
36	2	1	1	–3	3	1	–2	7	3	1	0	1
37	3	–1	–1	2	1	1	1	0	2	2	3	7
38	2	1	–1	3	3	2	2	–7	1	0	1	–2
39	1	1	1	6	2	–1	2	6	3	1	–1	2
40	1	1	2	3	2	–1	0	3	3	–1	0	1

41–50. Методом Гаусса решить систему уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = b_4. \end{cases}$$

	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	b_1	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	b_2
41	2	1	1	2	4	7	3	3	2	5	8	15
42	5	3	3	6	11	20	3	3	2	5	8	15
43	4	3	2	5	9	16	2	3	1	4	6	11
44	2	3	0	3	5	8	0	3	−1	2	2	3
45	1	3	0	3	4	7	−1	3	−1	2	1	2
46	2	3	1	4	6	11	0	1	0	1	1	2
47	5	3	3	6	11	20	3	2	2	4	7	13
48	3	3	2	5	8	15	1	3	1	4	5	10
49	3	3	1	4	7	12	1	3	0	3	4	7
50	5	3	2	5	10	17	3	3	1	4	7	12

	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	b_3	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	b_3
41	1	1	2	3	4	9	3	2	2	4	7	13
42	5	4	3	7	12	22	4	3	4	7	11	22
43	2	2	1	3	5	9	1	1	1	2	3	6
44	1	2	0	2	3	5	2	2	1	3	5	9
45	1	4	0	4	5	9	1	2	1	3	4	8
46	2	4	1	5	7	13	1	1	1	2	3	6
47	5	4	2	6	11	19	2	1	2	3	5	10
46	3	4	2	6	9	17	3	2	3	5	8	16
49	3	4	1	5	8	14	3	2	2	4	7	13
50	5	4	2	6	11	19	4	3	3	6	10	19

51–60. Даны точки $A(k, l)$, $B(m, n)$, $C(p, q)$. Найти координаты вектора $\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, длину вектора $\overrightarrow{AB}$, косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, уравнение прямой AC, расстояние от точки B до прямой AC.

	51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**57**	**59**	**60**
k	9	3	8	9	1	6	3	8	6	7
l	7	7	4	1	2	5	6	5	3	3
m	3	5	2	2	8	7	1	2	5	9
n	2	4	6	5	7	4	8	6	7	6
p	5	2	8	2	9	7	5	9	3	4
q	3	4	9	9	7	1	4	7	2	5
α	7	8	5	3	8	3	7	6	5	7
β	6	5	3	7	1	2	1	2	7	3

61–70. Что можно сказать о взаимном расположении прямых $kx + ty + m = 0$ и $nx + py + q = 0$?

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
k	1	21	11	2	1	2	1	3	1	5
t	–3	8	3	1	–2	–1	–1	1	–2	2
m	–10	18	12	4	–3	6	–4	–5	10	4
n	–5	42	22	10	–3	6	3	21	4	–15
p	15	16	6	5	6	–3	–3	7	–8	–6
q	50	–30	24	30	9	–20	–20	–35	40	–20

71–80. Изобразить прямую $kx + py + m = 0$.

	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
k	1	21	11	2	1	2	1	3	1	5
p	–3	8	3	1	–2	–1	–1	1	–2	2
m	–10	18	12	4	–3	6	–4	–5	10	4

81–90. Являются ли линейными следующие преобразования?

81. $Ax = (6x_1 + 6x_2 - 5x_3, 4x_1 + 7x_2 + x_3, x_1 - 2x_2 - 5x_3)$, $Bx = (3x_1 + x_2, -x_1 - x_2, x_1)$.

82. $Ax = (2x_1 + 4x_2, x_1 - x_2, x_2)$, $Bx = (-9x_1 + 3x_2 - 4x_3, x_2, 7x_1 + 6x_2 + 9x_3)$.

83. $Ax = (3x_1 + x_3, -x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 2 + x_3)$, $Bx = (x_1 + x_2 - x_3, x_2 + x_3, x_2)$.

84. $Ax = (4x_1 + 5x_2 - 6x_3, x_2 - 2x_3, x_3)$, $Bx = (x_1 + 3x_2, x_1 - x_2, x_1 + x_2 - 5x_3 + 8)$.

85. $Ax = (x_1, 2x_1 + x_2, x_2 - 3x_3 + 4)$, $Bx = (5x_1 + x_2, x_1, x_2 + 7x_3)$.

86. $Ax = (6x_1 + 2x_2 - 3x_3, x_2 + 5, -x_1 + 2x_2 - 8x_3)$, $Bx = (x_3, 2x_1 + 6x_3, -2x_1 - 7x_2 + x_3)$.

87. $Ax = (8x_1 - 6x_2 + 4, -x_1 + 2x_2 + x_3, x_3)$, $Bx = (2x_1 + 3x_2 - 7x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_3)$.

88. $Ax = (-5x_1 - 2x_2 + x_3, 7x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 - x_3)$, $Bx = (x_1 + x_2, -2x_1 + 3x_2 + 5, x_1 - x_3)$.

89. $Ax = (4x_1 + 5x_2 - 9x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_2)$, $Bx = (7x_1 - 2x_2 + 4x_3, -2x_1 + 3 - 4x_3, x_1 + x_3)$.

90. $Ax = (-9x_1 + x_2 - 3x_3, x_1, 6x_2 + 5x_3)$, $Bx = (x_1 + 3x_2 - 4x_3, 2x_1 + 3x_2 - 7, x_1 + 3x_3)$.

91–100. Решить уравнение $kx^3 + px^2 + mx + n = 0$.

	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
k	2	6	6	5	6	7	5	5	5	5
p	11	7	–7	–4	–4	–8	–4	–4	–4	–4
m	19	–1	–1	–12	–12	14	–14	–15	–16	–17
n	10	–2	2	–3	–2	–13	–5	–6	–7	–8

101–110. Дана матрица линейного оператора $A = \begin{pmatrix} k & m \\ l & n \end{pmatrix}$ в базисе $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $e_1' = (p, q)$, $e_2' = (r, s)$.

	101	**102**	**103**	**104**	**105**	**106**	**107**	**108**	**109**	**110**
k	9	3	8	9	1	6	3	8	6	7
l	7	7	4	1	2	5	6	5	3	3
m	3	5	2	2	8	7	1	2	5	9
n	2	4	6	5	7	4	8	6	7	6
p	5	2	8	2	9	7	5	9	3	4
q	3	4	9	9	7	1	4	7	2	5
r	7	8	5	3	8	3	7	6	5	7
s	6	5	3	7	1	2	1	2	7	3

111–120. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} k & m \\ l & n \end{pmatrix}$.

	111	**112**	**113**	**114**	**115**	**116**	**117**	**118**	**119**	**120**
k	3	1	5	1	4	−5	1	−7	8	−2
l	3	7	1	7	2	2	5	−1	2	4
m	2	−2	3	−3	1	1	−3	3	−3	−3
n	4	−8	3	−9	5	−4	9	−3	3	−9

121–130. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} k & n & r \\ l & p & s \\ m & q & t \end{pmatrix}$.

	k	l	m	n	p	q	r	s	t
121	4	−1	1	−2	3	−2	−1	−1	2
122	2	−1	1	−1	2	−1	0	0	1
123	3	0	0	−1	2	−1	1	−1	2
124	5	0	0	−1	4	−1	−1	−1	4
125	6	−1	1	−2	5	−2	−1	−1	4
126	3	2	−2	1	2	1	−1	−1	4
127	2	1	−1	0	1	0	−1	−1	2
128	2	1	−1	1	2	1	0	0	3
129	4	1	−1	1	4	1	0	0	5
130	5	−2	−2	1	4	1	−1	−1	6

Раздел II

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Глава 1

МНОЖЕСТВО

Собрание предметов, родственных по некоторому признаку, часто рассматривается как самостоятельный объект.

Пример 1. А, Б, В, Г, ... — алфавит.

Пример 2. 1, 2, 3, 4, ... — натуральные числа.

Пример 3. Кофейник, сахарница, чашки, блюдца — сервиз.

Пример 4. Персонажи басен И. А. Крылова.

Немецкий математик Кантор ввел понятие *«множество»*, которое относится к первоначальным понятиям, не подлежащим определению. Чтобы сделать этот термин яснее, с ним сопоставляют такие его синонимы, как «совокупность», «собрание», «набор». Алфавит, натуральные числа, сервиз, персонажи басен И. А. Крылова — это примеры множеств.

Предметы, составляющие множество, называются его *элементами*. Говорят, что они принадлежат множеству. Символически это записывают так: $a \in A$ (элемент a принадлежит множеству A). Будем обозначать множество заглавными буквами (A, B, C, ...), а элементы множеств — маленькими буквами (a, b, c, ...). Запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Если число элементов множества конечно, то множество называют *конечным*, иначе — *бесконечным*. Так, множество персонажей басен Крылова — конечное множество, а натуральные числа — бесконечное множество.

Встречаются множества, не содержащие ни одного элемента. Например, множество людей, чей рост составляет 10 метров. Такие множества называют *пустыми* и обозначают символом $\varnothing$.

Существуют разные способы задания множеств. Конечное множество можно задать перечислением всех его элементов.

Пример 5. Планеты Солнечной системы = {Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, Плутон}.

Задать множество можно также с помощью характеристического признака, по которому устанавливают, принадлежит ли элемент рассматриваемому множеству.

Пример 6. Персонажи басен И. А. Крылова.

Запись $Y = \{x \in X \mid S(x)\}$ означает, что множество Y состоит из элементов $x \in X$, обладающих свойством $S(x)$.

Пример 7. $Y = \{x$ — натуральное число $\mid x$ делится на $2\}$ — множество четных чисел.

Множество A называют ***подмножеством множества*** B ($A \subset B$), если все элемент из A входят в B.

Пример 8. A — множество четных чисел, B — множество натуральных чисел, $A \subset B$.

Два множества называют *равными* ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов или являются пустыми множествами.

Существуют следующие операции над множествами:

1) *объединение*: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$ — элементы нового множества лежат хотя бы в одном из множеств A или B;

2) *пересечение*: $A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$ — элементы нового множества лежат в обоих множествах A, B;

3) *разность*: $A \backslash B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$ — элементы нового множества — это элементы множества A, которые не лежат в B;

4) *дополнение множества* A в множестве U ($A \subset U$): $\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\} = U \backslash A$.

Пример 9. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$, $B = \{2, 3, 4\}$.

Тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$, $A \backslash B = \{1, 6, 7, 8\}$, $\overline{A} = \{4, 5, 9, 10\}$.

Глава 2

ФУНКЦИЯ

§ 2.1. ПОСТОЯННЫЕ И ПЕРЕМЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Все величины в математике делятся на постоянные и переменные. *Постоянная величина* сохраняет одно и то же значение. *Переменная величина* может принимать различные значения. Множество всех значений переменной величины образует ее *область значений*.

Введем следующие обозначения. $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ — множество целых чисел, R — множество действительных чисел, отрезок $[a, b] = \{x \in R \mid a \leqslant x \leqslant b\}$, интервал $(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$, полуинтервалы $[a, b) = \{x \in R \mid a \leqslant x < b\}$ и $(a, b] = \{x \in R \mid a < x \leqslant b\}$. Для отрезка, интервала и полуинтервала будем использовать общее название *промежуток*.

§ 2.2. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

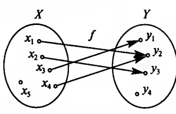
В практических задачах часто возникает ситуация, когда значения одной величины определяют значения другой величины. Понятие функции — это математическая основа изучения связей между переменными.

Рассмотрим два множества X и Y. Говорят, что на множестве X задана функция f со значениями во множестве Y, если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$.

Условные обозначения $f\colon X \to Y$ (функция f из X в Y), $f(x) = y$ («эф от икс равно игрек»).

Та часть множества X, на которой задана функция f (а возможна ситуация, когда не всем элементам $x \in X$ будет поставлен в соответствие элемент $y \in Y$), называется *областью определения функции f*. Те элементы $y \in Y$, которые поставлены в соответствие элементам $x \in X$, называются *областью значений функции f*. Величину x называют *аргументом* (независимой переменной), а величину y называют *функцией* (зависимой переменной).

Пример 10. Задана функция $f: X \to Y$.



$f(x_1) = f(x_4) = y_2, f(x_2) = y_3, f(x_3) = y_1$. Элементу x_5 не поставлен в соответствие ни один элемент из Y. Элемент y_4 не поставлен в соответствие ни одному элементу из X. $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ — это область определения функции f. $\{y_1, y_2, y_3\}$ — это область значений функции f.

Мы видим, что один элемент y_2 соответствует двум различным элементам — x_1 и x_4. Это не запрещается ( ). Запрещается другое ( ): соответствие двух значений функции одному значению аргумента.

Здесь можно вспомнить следующие пословицы: «для глухого двух обеден не служат», «одному началу не два конца», «за двумя зайцами погонишься — ни одного не поймаешь».

В дальнейшем будем рассматривать только числовые функции, то есть X и Y — числовые множества.

§ 2.3. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Функция задана, если известны область определения и закон соответствия, по которому для каждого значения аргумента x можно найти соответствующее ему значение функции y.

1. *Табличный способ.* Значения аргумента и соответствующие им значения функции заданы в виде таблицы.

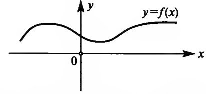
Пример 11. В примере 10 функцию можно задать таблицей.

x	x_1	x_2	x_3	x_4
y	y_2	y_3	y_1	y_2

Табличный способ широко используется на практике для записи результатов наблюдений и измерений. Иногда это единственный способ выражения функциональной зависимости. Но он не дает представления о характере функциональной зависимости между x и y, лишен наглядности, а также не дает ответа на вопрос: каковы значения функции в тех точках x_i, которые не представлены в таблице?

Задача 1. Привести пример табличного задания функции.

2. *Графический способ.* График функции $y = f(x)$ — это множество точек координатной плоскости вида $(x, f(x))$, где x — произвольное число из области определения функции f.



Графический способ задания функции удобен своей наглядностью.

3. *Аналитический способ.* Зависимость между x и y задается в виде математической формулы. Указаны действия, которые нужно выполнить с x, чтобы получить соответствующее значение y.

Пример 12. Задана функция $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Тогда для нахождения значения y нужно выполнить следующую цепочку вычислений: $x \to x^2 \to x^2 + 1 \to \sqrt{x^2 + 1} = y$.

Например, для $x = 1$ цепочка вычислений такова: $1 \to 1^2 = 1 \to 1 + 1 = 2 \to \sqrt{2} = y$, то есть $f(1) = \sqrt{2}$.

Задача 2. Написать цепочку вычислений для функции $y = f(x) = 1/(x + 5)^2$ и найти значение функции при $x = 2$.

При аналитическом способе область определения функции — это те значения переменной x, при которых формула имеет смысл. Так, в примере 12 x любое, а в задаче 2 должно быть $x \neq -5$. В математике предпочтение отдается именно аналитическому способу. Зная формулу $y = f(x)$, всегда можно составить таблицу и построить график. Поэтому на практике комбинируют все три способа.

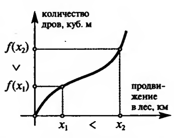
§ 2.4. ЭЛЕМЕНТЫ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИИ

Современная математика знает множество функций. У каждой свой неповторимый облик, как неповторим облик каждого из людей. Но при всей непохожести одного человека на другого у каждого есть голова, рот, туловище. Точно так же облик каждой функции можно представить сложенным из набора характерных деталей. В них и проявляются основные свойства функций.

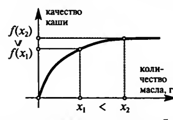
Функции — это математические портреты устойчивых закономерностей, постигаемых человеком.

Чтобы понять характерные свойства функций, естественно обратиться к пословицам — отражению устойчивых закономерностей, выверенных многовековым опытом народа. Для каждой пословицы изобразим график, из которого и получим математическую запись свойства функции.

Из целого ряда близких по смыслу пословиц («больше говорить — больше согрешить», «много ума — много греха, а на дурне не взыщут», «чем дальше в лес, тем больше дров», «большому кораблю — большое плавание», «посеешь в погоду — больше приплоду», «каково аукнется, таково и откликнется», «чем больше кошку гладишь, тем больше она горб поднимает») выберем одну, например, «чем дальше в лес, тем больше дров».



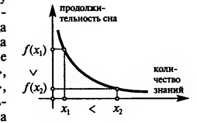
На математическом языке это означает: для любых x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) $f(x_1) < f(x_2)$ (меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции). Такая функция называется *возрастающей.*



Из близких по смыслу пословиц («стар пес, да верно служит», «кашу маслом не испортишь») выберем одну, например, «кашу маслом не испортишь».

На математическом языке это означает: для любых x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (меньшему значению аргумента соответствует не большее значение функции). В отличие от предыдущего случая здесь значения в различных точках могут и совпадать. Такая функция называется *неубывающей.*

Из целого ряда близких по смыслу пословиц («меньше врется — спокойнее живется», «не много читай, да много разумей», «долго рассуждай, да скоро делай», «тише едешь — дальше будешь», «много знать — мало спать», «из грязи, да посажен в князи», «дальше положишь — ближе возьмешь», «снову метла резко мела, а

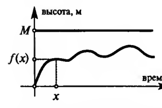


обилась — притупела») выберем одну, например, «много знать — мало спать».

На математическом языке это означает: для любых x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) $f(x_1) > f(x_2)$ (меньшему значению аргумента соответствует большее значение функции). Такая функция называется *убывающей.*

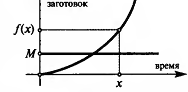
Аналогично вышесказанному можно дать определение *невозрастающей* функции: для любых x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (меньшему значению аргумента соответствует неменьшее значение функции).

Из целого ряда близких по смыслу пословиц («сколько кобылке не прыгать, а быть в хомуте», «хотел ехать дале, да кони встали», «сильны временщики, да не долговечны», «каков не будь грозен день, а вечер настанет», «быть бычку на веревочке, хлебать лапшу на тарелочке», «и сокол выше солнца не летает», «выше лба уши не растут», «выше меры конь не скачет», «выше носа плюнешь, себя заплюнешь», «как ни гнись, а поясницы не поцелуешь») выберем одну, например, «и сокол выше солнца не летает».



На математическом языке это означает: существует постоянная $M = \text{const} > 0$ такая, что $|f(x)| < M$ для всех x. Такая функция называется *ограниченной.*

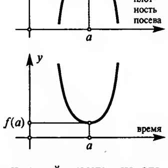
Из целого ряда близких по смыслу пословиц («сколько воды не пить, а пьяну не быть», «на рать сена не накосишься», «на огонь дров не напасешься», «бездонной кадки водой не наполнишь», «со всего свету не собрать цвету», «на голодного коня травы в поле много», «пьет, как в бездонную кадку льет», «суму нищего не наполнишь») выберем одну, например, «на рать сена не накосишься».



На математическом языке это означает: для любой постоянной $M = \text{const} > 0$ существует x такой, что $|f(x)| > M$. Какие бы барьеры не ставились, они будут преодолены. Такая функция называется *неограниченной.*

Из целого ряда близких по смыслу пословиц («переученный хуже недоученного», «перерод хуже недорода» (цены низки), «перепой хуже недопоя», «пересев хуже недосева») выберем одну, например, «пересев хуже недосева». Вековой опыт свидетельствует: урожай лишь до

некоторой поры растет вместе с плотностью посева, дальше он снижается, так как при чрезмерной густоте ростки начинают глушить друг друга.



На графике точка $x = a$ — это *точка максимума*: $f(a) \geqslant f(x)$ для близких к точке a точек x. Функция такого вида называется *выпуклой вверх*.

Можно привести график другого вида. Точка $x = a$ — это *точка минимума*: $f(x) \geqslant f(a)$ для близких к точке a точек x. Функция такого вида называется *выпуклой вниз*.

Всем известна следующая докучливая сказка: «жил-был царь, у царя был двор, на дворе был кол, на колу мочало, начинай сказку с начала» и т. д. Каждая буква здесь повторяется ровно через 67 букв.

На математическом языке это означает, что существует постоянная $T = \text{const} > 0$ такая, что $f(x + T) = f(x)$ для всех x. Число T называется *периодом функции*, а сама функция называется *периодической*. В нашей докучливой сказке период $T = 67$ букв.

При построении графика периодической функции $f(x)$ нужно построить его на отрезке $[0, T]$, а затем параллельным переносом продолжить на отрезки $[nT, (n + 1)T]$, $n \in Z$.

Задача 3. Чему равен период в известной песне «У попа была собака...»?

§ 2.5. СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ

Рассмотрим следующее стихотворение:

Не было гвоздя — Подкова пропала. Не было подковы — Лошадь захромала. Лошадь захромала — Командир убит.	Конница разбита — Армия бежит. Враг вступает в город, Пленных не щадя, Оттого, что в кузнице Не было гвоздя.

С чего начались неприятности? С того, что непрочно державшаяся подкова отвалилась. А отчего подкова держалась непрочно? Оттого, что кузница не обеспечила штатного количества гвоздей. Подоб-

ные цепочки функциональных зависимостей возникают при анализе очень многих проблем.

Переменная y есть функция переменной t ($y = f(t)$), переменная t есть функция переменной x ($t = g(x)$). Тогда переменная y есть функция переменной x: $y = f(g(x))$.

Для вычисления значения функции нужно проделать следующую цепочку вычислений: $x \to g(x) \to f(g(x)) = y$. Это *сложная функция* (то есть функция от функции). Функции из примера 12 и задачи 2 — это примеры сложных функций.

Пример 13. $y = t + 1$, $t = x^2$. Тогда $y(x) = x^2 + 1$.

Пример 14. $y = \cos t$, $t = x^3$. Тогда $y(x) = \cos x^3$.

Задача 4. Привести примеры сложных функций.

§ 2.6. ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Очень часто при табличном способе задания функции нужно определить значение функции в промежуточной точке x, не представленной в таблице. Для этого определяют из таблицы отрезок $[x_0, x_1]$, на который попадает x, и считают, что функция на этом отрезке меняется линейно. Поэтому

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(f(x_1) - f(x_0)).$$

Пример 15. Функция задана таблицей:

x	2,38	2,45	2,63
$f(x)$	1,17	1,83	1,98

Определим значение функции в точке $x = 2{,}52$.

Так как $2{,}45 < 2{,}52 < 2{,}63$, то $x_0 = 2{,}45$, $x_1 = 2{,}63$, $f(x_0) = 1{,}83$, $f(x_1) = 1{,}98$.

Тогда $f(x) = f(2{,}52) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(f(x_1) - f(x_0)) = 1{,}83 + \frac{2{,}52 - 2{,}45}{2{,}63 - 2{,}45}(1{,}98 - 1{,}83) \approx 1{,}89$.

Задача 5. Функция задана таблицей:

x	3,47	3,69	3,77
$f(x)$	2,48	2,31	2,24

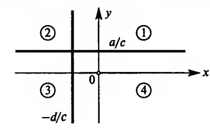
Найти значение функции в точке $x = 3{,}54$.

§ 2.7. ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Дробно-линейная функция — это функция вида $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, где a, b, c, d — коэффициенты и $bc - ad \neq 0$.

Как схематично построить график этой функции? Проводим на координатной плоскости прямые $x = -\dfrac{d}{c}$ (в зависимости от знаков коэффициентов c, d эта прямая будет слева или справа от оси Oy) и $y = \dfrac{a}{c}$ (в зависимости от знаков коэффициентов a, c эта прямая будет выше или ниже оси Ox).

Эти прямые делят всю координатную плоскость на четыре угла:

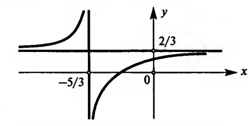


Если $bc - ad > 0$ (< 0), то надо изобразить гиперболу в 1-м и 3-м (во 2-м и 4-м) углах.

Пример 16. Изобразить схематично график функции $y = \dfrac{2x + 1}{3x + 5}$.

Здесь $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$, $d = 5$.

$bc - ad = 1 \times 3 - 2 \times 5 = -7 < 0$. Поэтому гипербола находится во 2-м и 4-м углах. $x = -d/c = -5/3$, $y = a/c = 2/3$.



Задача 6. Изобразить схематично график функции $y = \dfrac{3x + 2}{4x - 7}$.

§ 2.8. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Квадратичная функция — это функция вида: $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — коэффициенты и $a \neq 0$.

§ 2.8.1. Квадратные уравнения

Квадратные уравнения — это уравнения вида: $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — коэффициенты и $a \neq 0$.

Вычисляется дискриминант $D = b^2 - 4ac$. Если $D \geqslant 0$, то решение задается формулой $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Если $D < 0$, то действительных решений нет.

Пример 17. Решим уравнение $x^2 - 7x + 6 = 0$.
Здесь $a = 1$, $b = -7$, $c = 6$. Тогда $D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 > 0$. $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \times 1}$, то есть $x_1 = (7 - 5)/2 = 1$, $x_2 = (7 + 5)/2 = 6$.

Задача 7. Решить уравнение $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Пример 18. Решим уравнение $x^2 - 10x + 25 = 0$.
Здесь $a = 1$, $b = -10$, $c = 25$.
Тогда $D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 25 = 0$. $x = -b/(2a) = 10/2 = 5$.

Задача 8. Решить уравнение $x^2 - 8x + 16 = 0$.

Пример 19. Решим уравнение $2x^2 + 3x + 4 = 0$.
Здесь $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. Тогда $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 2 \times 4 = -23 < 0$. Действительных решений нет.

Задача 9. Решить уравнение $3x^2 + 7x + 8 = 0$.

§ 2.8.2. Разложение выражения $ax^2 + bx + c$ на множители

Если $x_1 \neq x_2$ — решения уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственное решение $x = x_0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.

Пример 20. $x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$ (см. пример 17).

Пример 21. $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$ (см. пример 18).

Задача 10. Разложить на множители $x^2 - 7x + 12$.

Задача 11. Разложить на множители $x^2 - 8x + 16$.

§ 2.8.3. Выделение полного квадрата в выражении $ax^2 + bx + c$

Представление выражения $ax^2 + bx + c$ в виде $a(x - x_0) + d$ называется *выделением полного квадрата*.

Нам понадобится формула: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Пример 22. Выделим полный квадрат для $2x^2 + 7x + 6$.

$2x^2 + 7x + 6 = (2x^2 + 7x) + 6$ (сгруппировали слагаемые, содержащие x) $= 2(x^2 + 7/2 \times x) + 6$ (вынесли коэффициент при x^2 за скобки) $=$ $= 2(x^2 + 2x \times 7/4) + 6 = 2(x^2 + 2x \times 7/4 + (7/4)^2 - (7/4)^2) + 6 = 2(x^2 +$ $+ 2x \times 7/4 + (7/4)^2) - 2 \times (7/4)^2 + 6$ (в первых скобках полный квадрат) $=$ $= 2(x + 7/4)^2 - 1/8$.

Задача 12. Выделить полный квадрат для $3x^2 - 4x + 5$.

§ 2.8.4. График квадратичной функции

График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ — это парабола.

Находим координаты вершины (x_0, y_0): $x_0 = -b/(2a)$, $y_0 = y(x_0) =$ $= ax_0^2 + bx_0 + c$.

$x = -b/(2a)$ — это ось симметрии параболы. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх. При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз.

Найдя решения x_1, x_2 уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, мы получим точки пересечения с осью Ox (если они есть). Точка пересечения графика с осью Oy имеет координаты $(0, c)$. Подставив вместо x различные значения, мы можем найти дополнительные точки.

Пример 23. Построить график функции $x^2 - 4x + 3$.

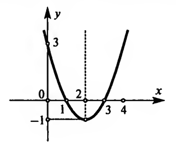
Здесь $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$.

Тогда $x_0 = -b/(2a) = -(-4)/(2 \times 1) = 2$, $y_0 = y(x_0) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 =$ $= -1$. Вершина $(2, -1)$.

$x = -b/(2a) = -(-4)/(2 \times 1) = 2$ — ось симметрии.

$x^2 - 4x + 3 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Тогда (1, 0) и (3, 0) — точки пересечения с осью Ox. $(0, c) = (0, 3)$ — точка пересечения с осью Oy.

При $x = 4$ $y(4) = 4^2 - 4 \times 4 + 3 = 3$, то есть точка (4, 3) принадлежит параболе. График функции $x^2 - 4x + 3$ приведен ниже.



Задача 13. Построить график функции $x^2 - 5x + 4$.

§ 2.8.5. Квадратные неравенства

Квадратные неравенства — это неравенства вида: $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, где a, b, c — коэффициенты и $a \neq 0$.

Решаем уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, отмечаем его решения x_1, x_2 (если они есть) на числовой оси. Для нестрогих неравенств (со знаками $\geqslant$ и $\leqslant$) x_1, x_2 отмечаем черными кружками и включаем в ответ. Для строгих неравенств (со знаками $>$ и $<$) x_1, x_2 отмечаем белыми кружками и не включаем в ответ.

Рисуем условную параболу. В зависимости от расположения параболы относительно оси Ox (выше или ниже) расставляем на интервалах знаки «+» или «–» и пишем ответ.

Пример 24. Решим неравенство $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$.

Решаем уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$, находим его корни: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Ветви параболы направлены вверх.

Тогда $x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$ (точки 2 и 3 включаем в ответ).

Задача 14. Решить неравенство $x^2 - 8x + 12 \leqslant 0$.

Пример 25. Решим неравенство $-x^2 + 8x - 15 > 0$.

Решаем уравнение $-x^2 + 8x - 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$. $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. Ветви параболы направлены вниз.

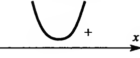
– 3 + 5 – x

Тогда $x \in (3, 5)$.

Задача 15. Решить неравенство $-x^2 + 9x - 20 < 0$.

Пример 26. Решим неравенство $x^2 + x + 1 > 0$.

Решаем уравнение $x^2 + x + 1 = 0$. $D = -3 < 0$. Это уравнение не имеет действительных решений. Ветви параболы направлены вверх.



Тогда x любое.

Задача 16. Решить неравенство $x^2 + 2x + 2 < 0$.

Задача 17. Решить неравенство $x^2 + 8x + 16 \leqslant 0$.

§ 2.9. РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Рациональная функция — это функция вида $P(x)/Q(x)$, где $P(x)$ — многочлен степени m, $Q(x)$ — многочлен степени n (см. главу 9 раздела I). Если $m < n$, то такая рациональная функция называется *правильной*. Если $m \geqslant n$, то такая рациональная функция называется *неправильной*.

Пример 27. $\dfrac{x^3 + x + 1}{2 + x^4}$ — это правильная рациональная функция, так как $3 < 4$.

Пример 28. $\dfrac{x^2 - 1}{x + 3}$ — это неправильная рациональная функция, так как $2 > 1$.

Задача 18. Что можно сказать о рациональной функции $\dfrac{x^5 - 4}{x^6 + x^7 + 3}$?

Задача 19. Что можно сказать о рациональной функции $\dfrac{x^4+1}{x^4-1}$?

§ 2.9.1. Рациональные неравенства. Метод интервалов

Рациональные неравенства — это неравенства вида $P(x)/Q(x) \geqslant 0$, $P(x)/Q(x) \leqslant 0$, $P(x)/Q(x) > 0$, $P(x)/Q(x) < 0$. Их решают *методом интервалов.*

Разлагаем числитель и знаменатель дроби на множители: $\dfrac{(x-a_1)^{c_1}\ldots(x-a_k)^{c_k}}{(x-b_1)^{d_1}\ldots(x-b_j)^{c_j}}$. Обязательное условие представления многочленов: $(x-a)$, но не $(a-x)$.

Отметим точки $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_j$ на числовой оси. В случае нестрогих неравенств точки $a_1, \ldots, a_k$ отмечают черными кружками и включают в ответ. Во всех остальных случаях все точки отмечают белыми кружками и не включают в ответ.

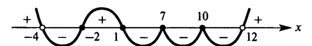
После этого рисуют кривую знаков. Ось Ox разбивает плоскость на две полуплоскости: верхнюю и нижнюю. Начинаем рисовать кривую знаков с правой части верхней полуплоскости и ведем к ближайшей отмеченной точке на оси Ox. Смотрим, какова четность показателя (будь то c_i или d_i), соответствующего этой точке. Если показатель нечетный, то мы переходим в другую полуплоскость и ведем кривую к ближайшей отмеченной точке на оси Ox. Если показатель четный, то мы остаемся в этой полуплоскости и ведем кривую к ближайшей отмеченной точке на оси Ox. И т. д. Мы переходим в другую полуплоскость только в случае нечетности соответствующего показателя (c_i или d_i).

В зависимости от расположения кривой относительно оси Ox (выше или ниже) расставляем на интервалах знаки «+» или «–» и пишем ответ.

Пример 29.

Решим неравенство $\dfrac{(x-1)^5(x+2)^3(x-7)^2(x-10)^{14}}{(x+4)^9(x-12)} \geqslant 0.$

Отметим точки на числовой оси и рисуем кривую знаков.



Начинаем рисовать кривую знаков с правой части верхней полуплоскости и ведем к ближайшей отмеченной точке на оси Ox (12). Так как у $(x-12)$ — нечетный показатель степени (1), то мы переходим в другую полуплоскость и ведем кривую к ближайшей отмеченной точке на оси Ox (10). Так как у $(x-10)^{14}$ — четный показатель степени (14), то мы остаемся в нижней полуплоскости и ведем кривую к ближайшей отмеченной точке на оси Ox (7). И т. д. Расставим знаки.

$x \in (-\infty, -4) \cup [-2, 1] \cup \{7\} \cup \{10\} \cup (12, \infty)$.

Задача 20.

Решить неравенство $\dfrac{(x-2)^2(x-4)^7(x+3)^8}{(x-1)^4(x-3)^9} \leq 0$.

Задача 21.

Решить неравенство $\dfrac{(x-3)^{20}(x+4)^7}{(x-1)^2(x+17)^6} > 0$.

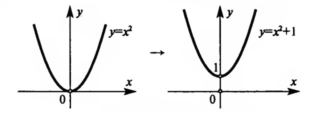
§ 2.10. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ

Очень часто, зная график функции $y = f(x)$, можно построить график функции, полученной из $f(x)$ каким-то преобразованием. Информация о свойствах этой функции сразу представлена в наглядной форме.

§ 2.10.1. Построение графика функции $y = f(x) + B$

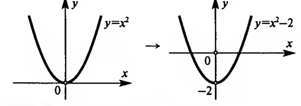
График функции $y = f(x) + B$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси Oy на B единиц.

Пример 30. График функции $y = x^2 + 1$ получается из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси Oy на одну единицу вверх.



Задача 22. Построить график функции $y = x^2 + 2$.

Пример 31. График функции $y = x^2 - 2$ получается из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси Oy на 2 единицы вниз.

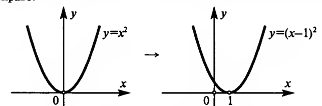


Задача 23. Построить график функции $y = x^2 - 1$.

§ 2.10.2. Построение графика функции $y = f(x + b)$

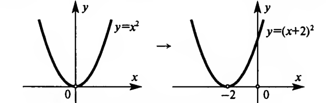
График функции $y = f(x + b)$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси Ox на $|b|$ единиц вправо (при $b < 0$) или влево (при $b > 0$).

Пример 32. График функции $y = (x - 1)^2$ получается из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси Ox на одну единицу вправо.



Задача 24. Построить график функции $y = (x - 2)^2$.

Пример 33. График функции $y = (x + 2)^2$ получается из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси Ox на две единицы влево.

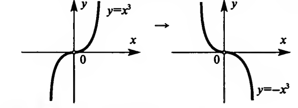


Задача 25. Построить график функции $y = (x + 1)^2$.

§ 2.10.3. Построение графика функции $y = -f(x)$

График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси Ox.

Пример 34. График функции $y = -x^3$ получается из графика функции $y = x^3$ симметричным отражением относительно оси Ox.

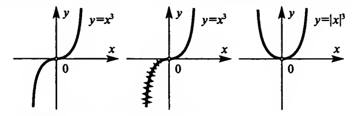


Задача 26. Построить график функции $y = -x^2$.

§ 2.10.4. Построение графика функции $y = f(|x|)$

Для построения графика функции $y = f(|x|)$ нужно у графика функции $y = f(x)$ стереть часть графика, соответствующую $x < 0$, а оставшуюся часть графика симметрично отразить относительно оси Oy.

Пример 35. Для построения графика функции $y = |x|^3$ нужно у графика функции $y = x^3$ стереть часть графика, соответствующую $x < 0$, а оставшуюся часть графика симметрично отразить относительно оси Oy.



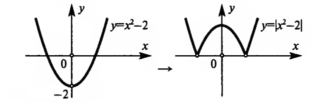
Задача 27. Построить график функции $y = (|x| - 1)^2$.

§ 2.10.5. Построение графика функции $y = |f(x)|$

Для построения графика функции $y = |f(x)|$ нужно у графика функции $y = f(x)$ оставить те части графика, где $f(x) \geqslant 0$ (они на

оси Ox или выше оси Ox), а те части графика, где $f(x) < 0$ (они ниже оси Ox), симметрично отразить относительно оси Ox.

Пример 36. Для построения графика функции $y = |x^2 - 2|$ нужно у графика функции $y = x^2 - 2$ оставить те части графика, которые лежат на оси Ox или выше оси Ox, а те части графика, которые лежат ниже оси Ox, симметрично отразить относительно оси Ox.



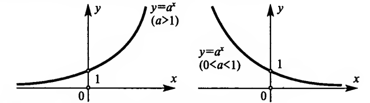
Задача 28. Построить график функции $y = |x^2 - 1|$.

§ 2.11. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Вместо суммы $7 + 7 + 7 + 7$ кратко пишут 4×7. Вместо произведения $7 \times 7 \times 7 \times 7$ кратко пишут 7^4, то есть возникает степень с целым показателем.

Показательная функция — это обобщение понятия степени с целым показателем. Функция $y = a^x$, где $a = \text{const} > 0$, $a \neq 1$, — это показательная функция, x любое.

Свойства показательной функции: $a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$ для любых x_1 и x_2, $a^x > 0$ для всех x. Для $0 < a < 1$ показательная функция убывает. Для $a > 1$ показательная функция возрастает; $a^0 = 1$, $a^{-k} = 1/a^k$, $1/a^{-n} = a^n$. График показательной функции приведен ниже.



Задача 29. Построить график функции $y = 2^x$.

§ 2.12. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Логарифмом числа x по основанию a ($a = \text{const} > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число x: $a^{\log_a x} = x$.

Пример 37. $\log_2 16 = 4$, так как $2^4 = 16$.

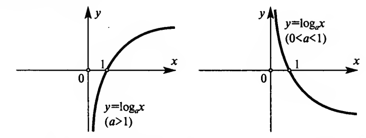
Задача 30. Чему равен $\log_3 9$?

Число a называется *основанием логарифма*. Логарифмы по основанию 10 называются *десятичными* и обозначаются lg. Логарифмы по основанию e называются *натуральными* и обозначаются ln.

Функция $y = \log_a x$ называется *логарифмической функцией*. Область определения логарифмической функции — множество $x > 0$.

$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$ для положительных x_1 и x_2. Всегда $\log_a 1 = 0$, так как $a^0 = 1$.

Для $0 < a < 1$ логарифмическая функция убывает. Для $a > 1$ логарифмическая функция возрастает. График логарифмической функции приведен ниже.



§ 2.13. ВЗАИМНО ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим композицию показательной и логарифмической функций, то есть применим их друг за другом сначала в одном порядке, а затем в другом порядке: $x \to a^x \to \log_a a^x = x$, x $(x > 0) \to \log_a x \to$ $\to a^{\log_a x} = x$, то есть композиция этих функций есть функция, дающая исходный аргумент. Такие функции называются *взаимно обратными*.

Показательная и логарифмическая функции — это пример взаимно обратных функций.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов координатной плоскости.

§ 2.14. ОКРУЖНОСТЬ

Уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ задает на координатной плоскости окружность радиуса R с центром (a, b).

Пример 38. Уравнение $(x-2)^2+(y+3)^2=16$ задает на координатной плоскости окружность радиуса 4 с центром $(2, -3)$.

Задача 31. Что можно сказать про окружность, заданную уравнением $(x+5)^2+(y-1)^2=3$?

Уравнение $x^2+y^2=R^2$ задает на координатной плоскости окружность радиуса R с центром в начале координат.

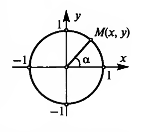
Пример 39. Уравнение $x^2+y^2=1$ задает на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

Задача 32. Что можно сказать про окружность, заданную уравнением $x^2+y^2=4$?

§ 2.15. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 2.15.1. Функции синус и косинус. Основное тригонометрическое тождество

Рассмотрим окружность $x^2+y^2=1$. Отметим на ней точку $M(x, y)$. Соединим точку M с началом координат O. Угол между OM и осью Ox обозначим α.



При изменении угла α будет передвигаться по окружности и точка M, то есть будут изменяться и ее координаты. Мы получаем две тригонометрические функции: $x=\cos\alpha$ (косинус) и $y=\sin\alpha$ (синус).

Так как точка $M(x, y)$ лежит на окружности, то $x^2+y^2=1$, то есть $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$. Это — *основное тригонометрическое тождество.* $|\cos\alpha|\leqslant 1$, $|\sin\alpha|\leqslant 1$ для всех α.

§ 2.15.2. Перевод градусов в радианы и наоборот

Угол можно измерять в градусах или в радианах. Полный оборот равен 360° или 2π радиан, полуоборот — это 180° или π радиан.

Необходимо уметь переводить градусы в радианы и наоборот.

Пример 40. Переведем 45° в радианы.

180° — это π радиан, а 45° — это a радиан. Составляем пропорцию $\dfrac{180°}{45°} = \dfrac{\pi}{a}$. Отсюда $a = 45\pi/180 = \pi/4$.

Задача 33. Перевести 30° в радианы.

Пример 41. Переведем $2\pi/3$ в градусы.

180° — это π радиан, a° — это $2\pi/3$ радиан. Составляем пропорцию $\dfrac{180°}{45°} = \dfrac{\pi}{2\pi/3}$. Отсюда $a = 180° \cdot (2\pi/3)/\pi = 120°$.

Задача 34. Перевести $3\pi/4$ в градусы.

§ 2.15.3. Функции тангенс и котангенс

Тангенс $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ($\alpha \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$), котангенс $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ($\alpha \neq \pi n$, $n \in Z$).

Отсюда $\mathrm{tg}\,\alpha \times \mathrm{ctg}\,\alpha = (\sin\alpha/\cos\alpha) \times (\cos\alpha/\sin\alpha) = 1$.

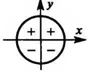
§ 2.15.4. Периодичность

Период функций синус и косинус равен 2π: $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$ для всех α.

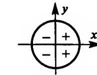
Период функций тангенс и котангенс равен π: $\mathrm{tg}(\alpha + \pi) = \mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}(\alpha + \pi) = \mathrm{ctg}\,\alpha$ для всех α.

§ 2.15.5. Знаки функций

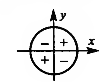
Для функции синус.



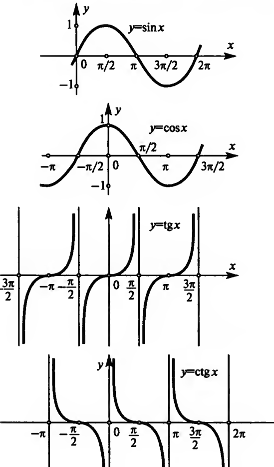
Для функции косинус.



Для функций тангенс и котангенс.



§ 2.15.6. Графики тригонометрических функций



Глава 3

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Последовательность — это бесконечное множество чисел, занумерованных в определенном порядке, то есть каждому натуральному n соответствует a_n.

Пример 42. 1, 2, 3, 4, ... — это пример последовательности. Здесь $a_n = n$.

Пример 43. 1; −3; 0,5; 4, ... — это пример последовательности. Здесь $a_1 = 1$, $a_3 = 0{,}5$.

Задача 35. Привести пример последовательности.

Задача 36. 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... Что можно сказать об a_n для этой последовательности?

§ 3.1. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Арифметическая прогрессия — это последовательность, для которой известен первый элемент a_1, а каждый следующий элемент последовательности, начиная со 2-го, равен сумме предшествующего элемента и некоторой постоянной $d = \text{const}$: $a_n = a_{n-1} + d$, $n \geqslant 2$. Число d называется *разностью арифметической прогрессии.*

Пример 44. У арифметической прогрессии $a_1 = 4$, $d = 3$. Тогда $a_2 = a_1 + d = 4 + 3 = 7$, $a_3 = a_2 + d = 7 + 3 = 10$, $a_4 = a_3 + d = 10 + 3 = 13$ и т. д.

Задача 37. У арифметической прогрессии $a_1 = 5$, $d = 4$. Выписать несколько первых элементов этой прогрессии.

Пример 45. У арифметической прогрессии $a_1 = 2$, $d = -3$. Выпишем несколько первых элементов этой прогрессии: 2, −1, −4, −7, ...

Задача 38. У арифметической прогрессии $a_1 = 6$, $d = -4$. Выписать несколько первых элементов этой прогрессии.

§ 3.1.1. Нахождение n-го элемента арифметической прогрессии

Зная первый элемент a_1 и разность d арифметической прогрессии, можно найти n-й элемент a_n: $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

Пример 46. В примере 44 $a_{12} = a_1 + d(12 - 1) = 4 + 3 \times 11 = 37$.

Задача 39. Найти a_{17} в задаче 37.

Задача 40. Найти a_{26} в задаче 38.

§ 3.1.2. Нахождение суммы первых n элементов арифметической прогрессии

Очень часто для арифметической прогрессии нужно найти сумму первых n элементов $S_n = a_1 + ... + a_n$.

Если известны a_1 и a_n, то $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \times n$.

Если известны a_1 и d, то $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \times n$.

Пример 47. В примерах 44 и 46 сумма первых двенадцати элементов $S_{12} = \dfrac{a_1 + a_{12}}{2} \times 12 = \dfrac{4 + 37}{2} \times 12 = 246$.

Задача 41. Найти сумму первых семнадцати элементов в задачах 37 и 38.

Пример 48. В примере 45 сумма первых девяти элементов $S_9 = \dfrac{2a_1 + d(9 - 1)}{2} \times 9 = \dfrac{2 \times 2 + (-3) \times 8}{2} \times 9 = -90$.

Задача 42. Найти сумму первых восьми элементов в задаче 37.

§ 3.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Геометрическая прогрессия — это последовательность, для которой известен первый элемент b_1, а каждый следующий элемент последовательности, начиная со 2-го, равен произведению предшествующего элемента и некоторой постоянной $q = \text{const}$: $b_n = b_{n-1}q$, $n \geqslant 2$. Число q называется ***знаменателем геометрической прогрессии.***

Пример 49. У геометрической прогрессии первый элемент $b_1 = 4$, знаменатель $q = 3$. Тогда $b_2 = b_1 q = 4 \times 3 = 12$, $b_3 = b_2 q = 12 \times 3 = 36$, $b_4 = b_3 q = 36 \times 3 = 108$ и т. д.

Задача 43. У геометрической прогрессии $b_1 = 5$, $q = 4$. Выписать несколько первых элементов этой прогрессии.

Пример 50. У геометрической прогрессии $b_1 = 2$, $q = -3$. Выпишем несколько первых элементов этой прогрессии: 2, –6, 18, –54, ...

Задача 44. У геометрической прогрессии $b_1 = 6$, $q = -4$. Выписать несколько первых элементов этой прогрессии.

§ 3.2.1. Нахождение n-го элемента геометрической прогрессии

Зная первый элемент b_1 и знаменатель q геометрической прогрессии, можно найти n-й элемент b_n: $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Пример 51. В примере 49 $b_{12} = b_1 q^{12-1} = 4 \times 3^{11} = 708588$.

Задача 45. Найти b_{10} в задаче 43.

Задача 46. Найти b_9 в задаче 44.

§ 3.2.2. Нахождение суммы первых n элементов геометрической прогрессии

Очень часто для геометрической прогрессии нужно найти сумму первых n элементов $S_n = b_1 + ... + b_n$. Если известны первый элемент b_1 и знаменатель q, то $S_n = b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

Пример 52. В примере 49 сумма первых семи элементов $S_7 = b_1 \dfrac{q^7 - 1}{q - 1} = 4 \times \dfrac{3^7 - 1}{3 - 1} = 4372$.

Задача 47. Найти сумму первых шести элементов в задаче 43.

Задача 48. Найти сумму первых восьми элементов в задаче 44.

§ 3.3. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Число A называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех последующих номеров n ($n > N$) выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. Кратко это пишут так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ (предел a_n равен A при n, стремящемся к бесконечности) или $a_n \to A$ ($n \to \infty$). Неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$ можно записать иначе: $-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$.

Геометрически это изображается так:

$A-\varepsilon$ A $A+\varepsilon$

С изменением числа ε меняется и длина интервала $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Но для всякого такого интервала можно указать номер $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого все элементы a_n попадут в этот интервал, N зависит от ε. Оценка для N вовсе не должна быть точной.

Последовательность, у которой есть предел, называется *сходящейся*.

Пример 53. Рассмотрим последовательность $\{1/n\}$. Это сходящаяся последовательность, так как $\lim\limits_{n\to\infty} (1/n) = 0$. (Интуитивно это понятно. Одно яблоко делят на миллиард человек. Сколько каждому достанется? Да практически ничего.)

Задача 49. Обосновать, используя определение, что $\lim\limits_{n\to\infty} (1/n) = 0$, то есть по заданному ε найти номер N.

§ 3.4. МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность называется *возрастающей* (*убывающей*), если каждый ее последующий элемент больше (меньше) предыдущего: $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} < a_n$) для всех n.

Пример 54. 1, 2, 3, 4, ... ($a_n = n$) — это возрастающая последовательность.

Задача 50. Привести пример возрастающей последовательности.

Пример 55. –1, –2, –3, –4, ... ($a_n = -n$) — это убывающая последовательность.

Задача 51. Привести пример убывающей последовательности.

Последовательность называется *невозрастающей* (*неубывающей*), если каждый ее последующий элемент не больше (не меньше) предыдущего: $a_{n+1} \leqslant a_n$ ($a_{n+1} \geqslant a_n$) для всех n.

Пример 56. 1, 1, 2, 2, 3, 3, ... — это неубывающая последовательность.

Задача 52. Привести пример неубывающей последовательности.

Пример 57. $-1, -1, -2, -2, -3, -3, ...$ — это невозрастающая последовательность.

Задача 53. Привести пример невозрастающей последовательности.

Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие последовательности образуют вместе класс *монотонных последовательностей*.

§ 3.5. ОГРАНИЧЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если существует постоянная $M = \text{const} > 0$ такая, что $|a_n| < M$ для всех n.

Пример 58. Последовательность $a_n = (-1)^n$, $n \geqslant 1$, $(-1, 1, -1, 1, ...)$ ограничена, так как $|a_n| < 2$ для всех n. Значение M можно выбирать произвольно (например, $M = 1000$). Главное, чтобы выполнялось условие $|a_n| < M$ для всех n.

Задача 54. Привести пример ограниченной последовательности.

§ 3.6. ТЕОРЕМА О ПРЕДЕЛЕ МОНОТОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Теорема. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

В теореме просто утверждается существование предела, но ничего не говорится о том, чему он равен.

Пример 59. Рассмотрим таблицу мировых рекордов в беге на 100 метров у мужчин. Каждый следующий результат не хуже предыдущего (рекорд либо побит, либо повторен), то есть это невозрастающая

(= монотонная) последовательность. Понятно, что она ограничена. Значит, существует предел.

Пример 60. Рассмотрим таблицу мировых рекордов в сумме двоеборья (рывок + толчок) у мужчин-штангистов в абсолютной весовой категории. Каждый следующий результат не хуже предыдущего (рекорд либо побит, либо повторен), то есть это неубывающая (= монотонная) последовательность. Понятно, что она ограничена (как-то трудно, даже принимая во внимание успехи химии, представить себе запись 100000000 кг в этой таблице). Значит, существует предел.

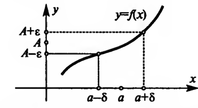
Задача 55. Применить теорему для последовательности $\{1/n\}$.

Глава 4

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при x, стремящемся к a, (пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ $(x \to a)$), если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать положительное число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$ (то есть для всех x, достаточно близких к a и отличных от a, значение $f(x)$ сколь угодно мало отличается от A).

$|f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, $0 < |x - a| < \delta$ $\Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta$ и $x \neq a$.



Для любого интервала $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ всегда можно построить интервал $(a - \delta, a + \delta)$ такой, что для всех $x \in (a - \delta, a + \delta)$, $x \neq a$, значения $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Это определение предела функции в точке. Не требуется, чтобы $f(a) = A$.

Аналогично число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать положительное число $M > 0$, такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > M$: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ $(x \to \infty)$.

§ 4.1. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

1. Предел постоянной равен этой постоянной: $\lim\limits_{x \to a} C = C$.

2. Постоянную можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{x \to a} (Cf(x)) = C \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

3. Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) пределов: $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a}f(x) \pm \lim\limits_{x\to a}g(x)$.

4. Предел произведения функций равен произведению пределов: $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to a}f(x) \times \lim\limits_{x\to a}g(x)$.

5. Предел частного функций равен частному пределов при условии, что предел знаменателя отличен от нуля: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ ($\lim\limits_{x\to a}g(x) \neq 0$).

Нахождение предела часто сводится к подстановке в исследуемое выражение предельного значения переменной.

Пример 61. $\lim\limits_{x\to 1}(4x^2 + 5x - 7) = 4 \times 1^2 + 5 \times 1 - 7 = 2.$

Задача 56. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(7x^2 + 3x - 12)$.

§ 4.2. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Иногда подстановка предельного значения переменной приводит к выражениям вида $0/0$, ∞/∞, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, ∞^0, 1^∞, 0^0. Такая ситуация называется *неопределенностью*, а поиск предела в такой ситуации — это *раскрытие неопределенностей*. Все зависит от искусства исследователя. Сначала нужно преобразовать выражение под знаком предела. Рассмотрим некоторые приемы.

Пример 62. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5}{3x-2}$. Это неопределенность вида ∞/∞. Разделим числитель и знаменатель дроби на x.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+5}{x}}{\frac{3x-2}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{3x}{x}-\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{3-\frac{2}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{5}{x})}{\lim\limits_{x\to\infty}(3-\frac{2}{x})} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}2 + \lim\limits_{x\to\infty}(5/x)}{\lim\limits_{x\to\infty}3 - \lim\limits_{x\to\infty}(2/x)} = \frac{2+5\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)}{3-2\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)} = \frac{2+5\times 0}{3-2\times 0} = \frac{2}{3}.$$

Задача 57. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x-8}{4x+9}$.

Пример 63. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}$.

Подставим предельное значение $x = 2$ в исследуемое выражение: $\dfrac{2^2-7\times 2+10}{2-2}=0/0$. Для раскрытия этой неопределенности разложим числитель дроби на множители (см. § 2.8).

$x^2-7x+10=0$, $x_1=2$, $x_2=5$. Тогда $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$.

Отсюда $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-5)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-5)=2-5=$ $=-3$.

Задача 58. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x-3}$.

§ 4.3. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{1/y}=e=$ $=2{,}71828...$

Пример 64. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{4}{x})^{2x}$. Это неопределенность вида 1^∞. Воспользуемся вторым замечательным пределом.

$\lim\limits_{x\to\infty}((1+\dfrac{4}{x})^{x/4})^8=(\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{4}{x})^{x/4})^8$. Замена $\dfrac{4}{x}=y$. Тогда $y\to 0$ $(x\to\infty)$. Поэтому $(\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{1/y})^8=e^8$.

Задача 59. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{5}{x})^{3x}$.

Глава 5

НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Если предел функции в точке a равен значению функции в этой точке, то такая функция называется ***непрерывной в точке** a*: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. *Непрерывная функция* — это функция, непрерывная в каждой точке своей области определения. График непрерывной функции можно нарисовать, не отрывая карандаша от листа бумаги. Точки, в которых функция не является непрерывной, называются *точками разрыва*.

Пример 65. $y = x^2$ — непрерывная функция.

Задача 60. Привести пример непрерывной функции.

Пример 66. Для функции $y = 1/x$ точка $x = 0$ — это точка разрыва.

Задача 61. Привести пример точки разрыва.

Сумма, разность, произведение непрерывных функций есть непрерывная функция.

§ 5.1. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

1. Если функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает в точках a и b значения разных знаков, то на этом отрезке найдется хотя бы одна точка, в которой функция принимает нулевое значение.
2. Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке и достигает на нем наибольшего и наименьшего значений.

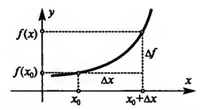
Глава 6

ПРОИЗВОДНАЯ

§ 6.1. ПРИРАЩЕНИЯ АРГУМЕНТА И ФУНКЦИИ

Если аргумент функции изменяется от значения x_0 до нового значения x, то разность этих значений Δx («дельта икс») $= x - x_0$ называется *приращением аргумента*. Отсюда $x = x_0 + \Delta x$. Тогда новое значение функции $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$, то есть мы получили *приращение функции* $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Приращения могут быть как положительными, так и отрицательными.



Пример 67. Определим приращения аргумента и функции для функции $f(x) = x^2$ при изменении аргумента от $x_0 = 2$ до $x = 2{,}01$.

Приращение аргумента $\Delta x = x - x_0 = 2{,}01 - 2 = 0{,}01$, приращение функции $\Delta f = f(x) - f(x_0) = 2{,}01^2 - 2^2 = 0{,}0401$.

Задача 62. Определить приращения аргумента и функции для функции $f(x) = x^3$ при изменении аргумента от $x_0 = 1$ до $x = 0{,}9$.

§ 6.2. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Функция $y = f(x)$. Рассмотрим точку x_0 и приращения аргумента Δx и функции Δf в этой точке. Разделим приращение функции Δf на приращение аргумента Δx и рассмотрим предел полученного отно-

шения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ (то есть в точке x_0 было сделано бесконечно малое приращение аргумента, найдено соответствующее этому приращению аргумента приращение функции и рассмотрено отношение этих приращений).

Если этот предел существует, то он называется *производной функции $f(x)$ в точке x_0* и обозначается $f'(x_0)$ («эф штрих от x_0»):

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если функция имеет производную в точке x_0, то говорят, что она *дифференцируема в этой точке.* Если функция имеет производную в каждой точке промежутка, то говорят, что она *дифференцируема на этом промежутке.*

Операцию нахождения производной функции называют *дифференцированием функции*, а раздел математики, изучающий свойства этой операции, — *дифференциальным исчислением.*

Пример 68. Найдем производную функции $f(x) = x^2$. Вместо x_0 будем писать просто x.

$$(x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x \times \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \times \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) =$$

$= 2x + 0 = 2x$, то есть $(x^2)' = 2x$.

Задача 63. Найти производную функции $f(x) = 7x$.

§ 6.3. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1. Производная постоянной равна нулю: $C' = 0$.
2. Постоянную можно выносить за знак производной: $(Cf(x))' = Cf'(x)$.
3. Производная суммы (разности) функций равна сумме (разности) производных: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.
4. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

§ 6.4. ПЕРВАЯ ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. $C' = 0$.
2. $x' = 1$.
3. $(x^2)' = 2x$.
4. $(x^3)' = 3x^2$.
5. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
6. $(x^p)' = px^{p-1}$.
7. $(\sin x)' = \cos x$.
8. $(\cos x)' = -\sin x$.
9. $(\mathrm{tg}\, x)' = 1/\cos^2 x$.
10. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -1/\sin^2 x$.
11. $(\ln x)' = 1/x$.
12. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
13. $(e^x)' = e^x$.
14. $(a^x)' = a^x \ln a$.

Пример 69. $(x + \sin x)' = x' + (\sin x)' = 1 + \cos x$.

Задача 64. Найти производную функции $x^2 - \cos x$.

Пример 70. $(2x^5)' = 2(x^5)' = 2 \times 5x^{5-1} = 10x^4$.

Задача 65. Найти производную функции $3x^7$.

Пример 71. $(x^2 2^x)' = (x^2)' \times 2^x + x^2 \times (2^x)' = 2x \times 2^x + x^2 2^x \ln 2$. Упрощать не надо.

Задача 66. Найти производную функции $x^3 e^x$.

Пример 72. $(1/x)' = (x^{-1})' = (-1) \times x^{-1-1} = -1/x^2$.

Задача 67. Найти производную функции $1/x^2$.

Пример 73. $(\log_2 x)' = \dfrac{1}{x \ln 2}$.

Задача 68. Найти производную функции $\lg x$.

Пример 74. $\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)' = \dfrac{x' \sin x - x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \dfrac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}$.

Задача 69. Найти производную функции $x^2/\cos x$.

§ 6.5. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ВТОРАЯ ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Производная сложной функции $f(g(x))$ находится по следующему правилу: $f_x'(g(x)) = f_g'(g(x)) g_x'(x)$, где нижний индекс указывает, по какой переменной ищется производная. С учетом этого правила полу-

чаем вторую таблицу производных (нужно взять первую таблицу производных, вместо x подставить $g(x)$ и дописать в правой части равенств множитель $g'(x)$).

1. —.
2. —.
3. $(g^2(x))' = 2g(x)g'(x)$.
4. $(g^3(x))' = 3g^2(x)g'(x)$.
5. $(\sqrt{g(x)})' = \dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}}g'(x)$.
6. $(g^p(x))' = pg^{p-1}(x)g'(x)$.
7. $(\sin g(x))' = g'(x)\cos g(x)$.
8. $(\cos g(x))' = -g'(x)\sin g(x)$.
9. $(\operatorname{tg}(g(x)))' = g'(x)/\cos^2 g(x)$.
10. $(\operatorname{ctg}(g(x)))' = -g'(x)/\sin^2 g(x)$.
11. $(\ln(g(x))' = g'(x)/g(x)$.
12. $(\log_a g(x))' = \dfrac{g'(x)}{g(x)\ln a}$.
13. $(e^{g(x)})' = g'(x)\,e^{g(x)}$.
14. $(a^{g(x)})' = g'(x)\,a^{g(x)}\ln a$.

Пример 75. Найдем производную функции $\sin 2x$.

Используем формулу $(\sin g(x))' = g'(x)\cos g(x)$. Здесь $g(x) = 2x$. Тогда $(\sin 2x)' = (2x)'\cos 2x = 2(x)'\cos 2x = 2\cos 2x$.

Задача 70. Найти производную функции $\cos 3x$.

Пример 76. Найдем производную функции e^{x^2}.

Используем формулу $(e^{g(x)})' = g'(x)\,e^{g(x)}$. Здесь $g(x) = x^2$. Тогда $(e^{x^2})' = (x^2)'e^{x^2} = 2xe^{x^2}$.

Задача 71. Найти производную функции $\operatorname{tg}(x^3)$.

Пример 77. Найдем производную функции $\ln\sqrt{2x}$.

Используем формулу $(\ln(g(x))' = g'(x)/g(x)$. Здесь $g(x) = \sqrt{2x}$. Тогда $(\ln\sqrt{2x})' = (\sqrt{2x})'/\sqrt{2x}$.

Теперь используем формулу $(\sqrt{g(x)})' = \dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}}g'(x)$. Здесь $g(x) = 2x$.

Тогда $\dfrac{(\sqrt{2x})'}{\sqrt{2x}} = \dfrac{(2x)'/(2\sqrt{2x})}{\sqrt{2x}} = \dfrac{2x'}{2 \times 2x} = \dfrac{1}{2x}$.

Мы видим, что иногда формулу для производной сложной функции приходится применять не один раз.

Задача 72. Найти производную функции $\log_2 \sin(x^3)$.

§ 6.6. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Производную от функции обычно называют *первой производной* (производной первого порядка). Производная — это функция. Если эта функция дифференцируема, то от нее можно взять производную, которую называют *второй производной* (производной второго порядка): $f''(x) = (f'(x))'$.

Производная n-го порядка — это производная от производной $(n-1)$-го порядка: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Пример 78. Найдем вторую производную функции $\sin x$.
$(\sin x)'' = ((\sin x)')' = (\cos x)' = -\sin x$.

Задача 73. Найти вторую производную функции $\cos x$.

§ 6.7. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Это правило используется для раскрытия неопределенностей. Если для неопределенностей вида 0/0 или ∞/∞ существует (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Возможна ситуация, когда правило Лопиталя нужно применить несколько раз.

Пример 79. Найдем $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$. Неопределенность вида 0/0.

Тогда $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\operatorname{tg} x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1/\cos^2 x}{1} = \dfrac{1}{\cos^2 0} = 1$.

Задача 74. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

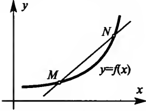
Пример 80. Найдем $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+5}{3x-2}$. Неопределенность вида ∞/∞.

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+5}{3x-2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+5)'}{(3x-2)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x)'+5'}{(3x)'-2'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2(x)'+0}{3(x)'-0} =$
$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\times 1}{3\times 1} = \dfrac{2}{3}$.

Задача 75. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x+8}{3x-9}$.

§ 6.8. УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ и возьмем на нем точки $M(x_0, f(x_0))$ и $N(x, f(x))$. Проведем через точки M и N прямую MN. Эта прямая называется *секущей* для графика функции $y = f(x)$. Теперь устремим точку N к точке M по графику (то есть $x \to x_0$). Секущая MN займет тогда предельное положение, которое называют *касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$. Уравнение этой касательной $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, то есть угловой коэффициент этой касательной равен значению производной в точке x_0. Это *геометрический смысл производной.*



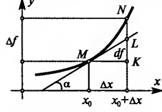
Пример 81. Найдем уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 1$. Имеем: $f(x) = x^2$, $f'(x) = (x^2)' = 2x$, $f'(x_0) = f'(1) = 2 \times 1 = 2$. $f(x_0) = f(1) = 1^2 = 1$.

Уравнение этой касательной $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

Задача 76. Найти уравнение касательной к графику функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 3$.

§ 6.9. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Функция $y = f(x)$. Рассмотрим в точке x_0 приращения аргумента Δx и функции Δf. Проведем в точке $(x_0, f(x_0))$ касательную к графику функции $y = f(x)$. Эта касательная разбивает отрезок KN на два отрезка. Один из них KL. Отрезок KL — это линейная (главная) часть приращения функции Δf. Эта часть называется *дифференциалом* и обозначается $df(x)$ («дэ эф от икс»). Из прямоугольного ΔMKL: $KL = KM\operatorname{tg}\alpha = \Delta x f'(x_0) = f'(x_0)\Delta x$. Мы получили формулу для вычисления дифференциала $df(x) = f'(x)\Delta x$. Подставим в эту формулу $f(x) = x$. Тогда $dx = x'\Delta x = \Delta x$, то есть дифференциал независимой переменной равен ее приращению. Поэтому $df(x) = f'(x)dx$.



Пример 82. $d(\sin x) = (\sin x)'dx = \cos x\,dx$.

Задача 77. Найти дифференциал функции $f(x) = x^2$.

§ 6.10. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА В ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Нужно вычислить значение функции $f(x)$ в точке x. Функция $f(x)$ может быть задана в виде довольно сложной формулы. Поэтому довольно часто прибегают к приближенному вычислению. Подбирают близкое к x значение x_0, где достаточно просто найти значение функции, и считают, что приращение функции Δf в точке x_0 приблизительно равно дифференциалу в этой точке: $\Delta f \approx df$ ($\Delta x = x - x_0$ — приращение аргумента), то есть $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$.

Отсюда $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Пример 83. Найдем приближенно $\sqrt{16{,}01}$.

Здесь $x = 16{,}01$, $x_0 = 16$, $\Delta x = x - x_0 = 16{,}01 - 16 = 0{,}01$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x_0) = f(16) = \sqrt{16} = 4$, $f'(x) = (\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$, $f'(x_0) = f'(16) = 1/(2\sqrt{16}) = 0{,}125$.

Тогда $f(x) = \sqrt{16{,}01} \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 4 + 0{,}125 \times 0{,}01 = 4{,}00125$. Для сравнения: с помощью калькулятора $\sqrt{16{,}01} \approx 4{,}0012498$.

Задача 78. Найти приближенно $2{,}03^2$.

§ 6.11. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ. ЛОКАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ

Окрестность точки x_0 — это интервал, содержащий точку x_0. Если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 ($x \neq x_0$) выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$), то x_0 называется *точкой локального максимума* (*минимума*). Для локальных максимумов и минимумов используют общее название — *локальный экстремум*.

Если производная функции положительна (отрицательна) на некотором интервале, то функция на этом интервале возрастает (убывает).

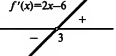
Достаточное условие локального экстремума. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Если производ-

ная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «–» (с «–» на «+»), то x_0 — это локальный максимум (минимум).

Пример 84. Найдем интервалы монотонности и точки локального экстремума для функции $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

$f'(x) = (x^2 - 6x + 8)' = 2x - 6$. Ищем *критические точки* — точки, в которых производная равна нулю или не существует. $f'(x) = 2x - 6 = 0$, $x = 3$. Заполним таблицу:

	$(-\infty, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f'	–	0	+
f	Убывает	Min	Возрастает



Задача 79. Найти интервалы монотонности и точки локального экстремума для функции $f(x) = -x^2 + 8x - 12$.

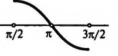
§ 6.12. ВЫПУКЛОСТЬ ВВЕРХ И ВНИЗ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

График функции $f(x)$ имеет на интервале (a, b) выпуклость вниз (вверх), если на этом интервале график расположен не ниже (не выше) любой касательной к этому графику. Если на рассматриваемом интервале вторая производная положительна (отрицательна), то на этом интервале график функции является выпуклым вниз (вверх).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Точка x_0 называется *точкой перегиба*, если при переходе через нее кривая меняет направление выпуклости (слева и справа от x_0 знаки второй производной различны).

Пример 85. Найдем интервалы выпуклости вниз и вверх, а также точки перегиба для функции $f(x) = \sin x$ на интервале $(\pi/2, 3\pi/2)$. Имеем: $f''(x) = (\sin x)'' = ((\sin x)')' = (\cos x)' = -\sin x = 0$, $x = \pi$. Заполним таблицу:

	$(\pi/2, \pi)$	π	$(\pi, 3\pi/2)$
f''	–	0	+
f	Выпукла вверх	Точка перегиба	Выпукла вниз



Задача 80. Найти интервалы выпуклости вниз и вверх, а также точки перегиба для функции $f(x) = \cos x$ на интервале $(-\pi, 0)$.

§ 6.13. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Исследование функций проводится по следующей схеме.

1. Область определения функции $f(x)$.
2. Точки пересечения с осью Ox. Находятся при решении уравнения $f(x) = 0$.
3. Точка пересечения с осью Oy — это $(0, f(0))$.
4. Специальные свойства функции (периодичность, четность-нечетность). Например, функция косинус четна ($\cos(-x) = \cos x$), а функции синус, тангенс, котангенс нечетны ($\sin(-x) = -\sin x$, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$). График четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.
5. Интервалы монотонности. Локальные экстремумы.
6. Выпуклость вверх и вниз. Точки перегиба.
7. Дополнительные точки.

Пример 86. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$ и построить ее график.

Область определения функции: x любое.

Найдем точки пересечения с осью Ox. Решаем уравнение $f(x) = 0$, т. е. $x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = 0$. Применим схему Горнера (см. раздел I, § 9.2).

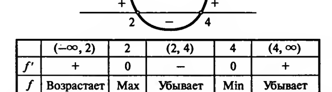
	1	−9	24	−16
1	1	−8	16	0

$(x-1)(x^2 - 8x + 16) = 0$, то есть $x = 1$ и $x = 4$. Это точки $(1, 0)$ и $(4, 0)$.

Точка пересечения с осью Oy — это $(0, f(0)) = (0, -16)$.

Найдем интервалы монотонности и локальные экстремумы.

$f'(x) = (x^3 - 9x^2 + 24x - 16)' = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8) = 3(x-2)(x-4)$.



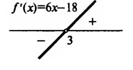
	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, \infty)$
f'	+	0	−	0	+
f	Возрастает	Max	Убывает	Min	Убывает

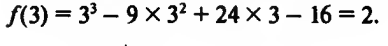
$f(2) = 2^3 - 9 \times 2^2 + 24 \times 2 - 16 = 4$. $f(4) = 0$. Исследуем график функции на выпуклость вверх и вниз, а также найдем точки перегиба.

$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 - 18x + 24)' = 6x - 18 = 6(x-3) = 0$.

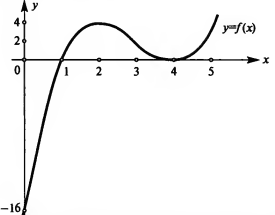
Заполним таблицу.

	$(-\infty, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f''	–	0	+
f	Выпукла вверх	Точка перегиба	Выпукла вниз





$f(3) = 3^3 - 9 \times 3^2 + 24 \times 3 - 16 = 2.$



Задача 81. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ и построить ее график.

§ 6.14. НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Дана непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция. Вычисляем ее производную и приравниваем к нулю. Среди решений полученного уравнения оставляем только те, которые попадают на отрезок $[a, b]$. В этих точках, а также в точках a и b находим значения функции и выбираем из них наибольшее и наименьшее.

Пример 87. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$ на отрезке $[0, 2]$.

$f'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1) = 0.$

$x = -1 \notin [0, 2]$ (исключаем из рассмотрения).

$x = 1 \in [0, 2]. f(1) = 1^3 - 3 \times 1 + 1 = -1, f(0) = 1, f(2) = 2^3 - 3 \times 2 + 1 = 3.$

Наибольшее значение равно 3, наименьшее значение равно -1.

Пример 82. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ на отрезке $[-1, 3]$.

Глава 7

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 7.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

В математике есть операции, которые являются обратными друг для друга. Например, сложение и вычитание, умножение и деление. Мы изучили операцию дифференцирования, то есть научились по функции $f(x)$ находить производную $f'(x)$. Теперь перед нами стоит обратная задача: как, зная производную $f'(x)$, восстановить исходную функцию $f(x)$?

Пусть задана функция $f(x)$ на интервале (a, b). Функция $F(x)$ называется *первообра́зной* для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a, b)$.

Пример 88. Функция $F(x) = x^2$ является первообразной для функции $f(x) = 2x$, так как $(x^2)' = 2x$.

Задача 83. Показать, что функция $F(x) = x^3$ является первообразной для функции $f(x) = 3x^2$.

Функция $F(x) = x^2$ является первообразной для функции $f(x) = 2x$. Но и функция $F(x) = x^2 + 1$ является первообразной для функции $f(x) = 2x$, так как $(x^2 + 1)' = 2x$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то выражение $F(x) + C$ ($C = \text{const}$) определяет множество всех первообразных функции $f(x)$.

Поясним смысл произвольной постоянной на примере движения автомобиля. Зная мгновенную скорость движения автомобиля в каждый момент времени, можно найти путь, пройденный этим автомобилем с начала движения до любого момента времени. Но для определения положения автомобиля надо еще знать пункт, откуда он выехал. Вот это-то начальное положение и задает постоянная C.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* и обозначается $\int f(x)dx$ («интеграл эф от икс

дэ икс»). Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, x — это *переменная интегрирования*. Процесс нахождения неопределенного интеграла называется *интегрированием*.

§ 7.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$ (из определения).

2. $d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx$.

3. Постоянную можно выносить за знак интеграла: $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$.

4. Интеграл от суммы (разности) функций есть сумма (разность) интегралов: $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

Дифференцирование и интегрирование являются взаимно обратными операциями. Результаты интегрирования можно проверить дифференцированием: если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $(F(x) + C)' = f(x)$.

§ 7.3. ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

Здесь $C = \text{const}$.

1. $\int 0dx = C$. Проверка: $C' = 0$.

2. $\int dx = x + C$. Проверка: $(x + C)' = 1$.

3. $\int xdx = x^2/2 + C$. Проверка: $(x^2/2 + C)' = x$.

4. $\int x^2dx = x^3/3 + C$. Проверка: $(x^3/3 + C)' = x^2$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$. Проверка: $(2\sqrt{x} + C)' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

6. $\int x^p dx = x^{p+1}/(p + 1) + C$ (здесь $p \neq -1$, может быть и дробным). Проверка: $(x^{p+1}/(p + 1) + C)' = x^p$.

7. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$. Проверка: $(-\cos x + C)' = \sin x$.

9. $\int \cos x dx = \sin x + C$. Проверка: $(\sin x + C)' = \cos x$.

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}\,x + C$. Проверка: $(\text{tg}\,x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg}\,x + C$. Проверка: $(-\text{ctg}\,x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x}$.

12. $\int e^x dx = e^x + C$. Проверка: $(e^x + C)' = e^x$.

13. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (a > 0,\ a \neq 1)$. Проверка: $(\frac{a^x}{\ln a} + C)' = a^x$.

14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C\ (a \neq 0)$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm p}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm p}\,| + C$.

§ 7.4. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Непосредственное интегрирование — это вычисление интегралов с помощью таблицы интегралов и свойств неопределенного интеграла.

Пример 89. $\int (5\cos x + 3x - 2^x + 7x^4)dx = 5\int \cos x dx + 3\int x dx - \int 2^x dx + 7\int x^4 dx = 5\sin x + 3x^2/2 - 2^x/\ln 2 + 7x^5/5 + C$.

Мы использовали формулы $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ при $a = 2$ и $\int x^p dx = x^{p+1}/(p + 1) + C$ при $p = 4$. Вместо того, чтобы писать четыре различных константы, мы добавили только одну.

Задача 84. $\int (3x^2 + \frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + 8\cos x + \frac{9}{\cos^2 x} + 15e^x)dx$.

§ 7.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Формула $\int u dv = uv - \int v du$ называется *формулой интегрирования по частям*.

Пример 90. $\int \ln x dx$. Здесь $u = \ln x$, $v = x$.

Тогда $\int \ln x dx = (\ln x) \times x - \int x d(\ln x) = x\ln x - \int x(\ln x)' dx = x\ln x - \int x \times (1/x) dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$.

Задача 85. $\int xe^x dx$. (Указание: $e^x dx = d(e^x)$).

§ 7.6. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В НЕОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Во многих случаях удается заменой переменной свести интеграл к новому интегралу, который или содержится в таблице, или легко вычисляется другим способом.

Пример 91. $\int \frac{xdx}{x^2+4}$.

Сделаем замену $x^2 + 4 = t$.

Отсюда $d(x^2+4) = dt \Leftrightarrow (x^2+4)'dx = dt \Leftrightarrow 2xdx = dt \Leftrightarrow xdx = dt/2$.

Тогда $\int \frac{xdx}{x^2+4} = \int \frac{dt/2}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C$.

Исходная переменная — это x. Поэтому делаем обратную замену:

$\int \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C$ (так как $x^2 + 4 > 0$).

Задача 86. $\int \frac{xdx}{x^2-6}$.

Пример 92. $\int \frac{dx}{x+6}$.

Сделаем замену $x + 6 = t$.

Отсюда $d(x+6) = dt \Leftrightarrow (x+6)'dx = dt \Leftrightarrow dx = dt$.

Тогда $\int \frac{dx}{x+6} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+6| + C$.

Задача 87. $\int \frac{dx}{x-9}$.

Пример 93. $\int \sin(5x+2)dx$.

Сделаем замену $5x + 2 = t$.

Отсюда $d(5x+2) = dt \Leftrightarrow (5x+2)'dx = dt \Leftrightarrow 5dx = dt \Leftrightarrow dx = dt/5$.

Тогда $\int \sin(5x+2)dx = \int \sin t\, dt/5 = \frac{1}{5}\int \sin t\, dt = \frac{1}{5}(-\cos t) + C =$

$= -\frac{1}{5}\cos(5x+2) + C$.

Задача 88. $\int \cos(7x+3)dx$.

Задача 89. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+5}}$.

§ 7.7. ПОНЯТИЕ О НЕБЕРУЩИХСЯ ИНТЕГРАЛАХ

Если с вычислением производной особых проблем не возникает, то с интегралами все не так просто. Например, интегралы $\int \frac{\sin x dx}{x}$, $\int e^{-x^2} dx$, $\int \frac{\cos x dx}{x}$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$ не берутся в элементарных функциях, то есть не существует элементарной функции, производная которой равна подынтегральной функции. Такие интегралы называются ***неберущимися***. Для многих неберущихся интегралов есть табличное представление.

Глава 8

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a, b]$. Отметим на отрезке $[a, b]$ точки $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, ..., n$) выберем точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и составим сумму $f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + ... + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ (значение функции в выбранной точке умножается на длину соответствующего отрезка; полученные числа суммируются).

Обозначим через δ длину наибольшего из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, ..., n$) и рассмотрим предел суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ при $\delta \to 0$: $\lim\limits_{\delta \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Если этот предел существует и не зависит от выбора точек x_i, ξ_i, то он называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$ («интеграл от a до b эф от икс дэ икс»). Числа a и b называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*.

§ 8.1. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt$.

2. Если нижний и верхний пределы интегрирования совпадают, то интеграл равен нулю: $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

3. Если поменять местами пределы интегрирования, то интеграл изменит знак: $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ для любых a, b, c.

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$.

6. Определенный интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов: $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

7. Для постоянных a и b верно $(\int_a^b f(x)dx)' = 0$.

§ 8.2. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. *Формула Ньютона-Лейбница*: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Сначала на пределы интегрирования не обращаем внимания и находим неопределенный интеграл. После этого в полученное выражение поочередно подставляем пределы интегрирования и вычисляем разность найденных значений. Например, для определения расхода электроэнергии за месяц нужно из показания электросчетчика в конце месяца вычесть показания электросчетчика в начале месяца. Напомним также, что при вычислении неопределенного интеграла появлялась произвольная постоянная: $\int f(x)dx = F(x) + C$. Так, по показаниям спидометра нельзя определить положение автомобиля в момент времени t, но можно узнать путь, пройденный этим автомобилем с момента времени a до момента времени b.

Пример 94. $\int_2^3 e^x dx$.

По таблице интегралов $\int e^x dx = e^x + C$.

Тогда $\int_2^3 e^x dx = e^x\Big|_2^3 = e^3 - e^2$.

Задача 90. $\int_0^\pi \sin x dx$.

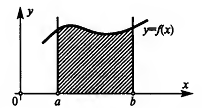
Пример 95. $\int_1^2 (2x + \frac{3}{x})dx = \int_1^2 2xdx + \int_1^2 \frac{3}{x}dx = 2\int_1^2 xdx + 3\int_1^2 \frac{1}{x}dx =$

$= 2\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + 3\ln|x|\Big|_1^2 = 2^2 - 1^2 + 3\ln|2| - 3\ln|1| = 3 + 3\ln 2.$

Задача 91. $\int_1^3 (4 - \frac{5}{x^2})dx.$

§ 8.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Площадь под кривой $y = f(x)$, ограниченная прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, равна $\int_a^b f(x)dx$.



Это геометрический смысл определенного интеграла.

Пример 96. Найдем площадь под кривой $y = x^2$, ограниченной прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Искомая площадь равна $\int_1^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$.

Задача 92. Найти площадь под кривой $y = x^3$, ограниченной прямыми $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

§ 8.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Верна следующая формула *интегрирования по частям в определенном интеграле*:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)du(x).$$

Пример 97. $\int\limits_2^3 \ln x dx.$

Применим формулу интегрирования по частям в определенном интеграле. Здесь $u(x) = \ln x$, $v(x) = x$.

Тогда $\int\limits_2^3 \ln x dx = x\ln x\Big|_2^3 - \int\limits_2^3 x d\ln x = 3\ln 3 - 2\ln 2 - \int\limits_2^3 x(\ln x)' dx = 3\ln 3 -$ $- 2\ln 2 - \int\limits_2^3 \frac{x}{x} dx = 3\ln 3 - 2\ln 2 - \int\limits_2^3 dx = 3\ln 3 - 2\ln 2 - x\Big|_2^3 = 3\ln 3 - 2\ln 2 -$ $- 3 + 2 = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1.$

Задача 93. Найти $\int\limits_1^2 xe^x dx$. (Указание: см. задачу 85).

§ 8.5. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Действуем, как в случае неопределенного интеграла. Подставив в формулу замены переменных значения нижнего и верхнего пределов интегрирования, найдем новые значения нижнего и верхнего пределов интегрирования. Поэтому обратную замену переменных делать не нужно.

Пример 98. $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x+3}.$

Замена переменных $x + 3 = t$. Тогда $d(x + 3) = dt$, то есть $dx = dt$.
При $x = 2$ (нижний предел интегрирования) $t = 2 + 3 = 5$.
При $x = 3$ (верхний предел интегрирования) $t = 3 + 3 = 6$.

Тогда $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x+3} = \int\limits_5^6 \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_5^6 = \ln|6| - \ln|5| = \ln 6 - \ln 5.$

Задача 94. $\int\limits_1^3 \frac{xdx}{x^2+1}.$

Глава 9

РЯДЫ

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$. Мы можем суммировать элементы последовательности: $a_1 + a_2 + a_3 + ...$

Эту сумму называют *рядом* и обозначают следующим образом: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (сумма элементов a_n при n от 1 до бесконечности).

Придавая n последовательно значения 1, 2, 3, ..., мы получим все элементы суммы.

§ 9.1. ВИДЫ РЯДОВ

Ряд называется *положительным* (*отрицательным*), если все $a_n > 0$ ($a_n < 0$).

Пример 99. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n$ $(= 1 + 2 + 3 + ...)$ является положительным.

Задача 95. Привести пример положительного ряда.

Пример 100. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-n)$ $(= -1 - 2 - 3 - ...)$ является отрицательным.

Задача 96. Привести пример отрицательного ряда.

Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ $(a_n > 0)$ называется *знакопеременным*.

Пример 101. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ $(= -1 + 2 - 3 + ...)$ является знакопеременным.

Задача 97. Привести пример знакопеременного ряда.

§ 9.2. СХОДЯЩИЕСЯ И РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ

Сумма вида $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ называется *частичной суммой ряда.* Мы берем только первые k слагаемых.

Пример 102. В примере 99 частичная сумма $S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$, а частичная сумма $S_{10} = 1 + 2 + ... + 10 = 55$.

Задача 98. Найти частичную сумму S_7 в примере 101.

Если последовательность частичных сумм $\{S_k\}$ с ростом k сходится, то ряд называется *сходящимся.* В противном случае ряд называется *расходящимся.*

Пример 103. Ряд в примере 99 — это пример расходящегося ряда.

Задача 99. Является ли ряд в примере 100 сходящимся?

§ 9.3. НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ

Из всего многообразия всевозможных признаков сходимости мы рассмотрим лишь один.

Необходимый признак сходимости. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Если будет установлено, что $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится (ведь в случае сходимости ряда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$).

Если же будет установлено, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ вовсе не обязан быть сходящимся (поэтому признак называется необходимым, а не достаточным).

Пример 104. Выясним сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+7}{8n-11}$.

Так как $\lim_{n\to\infty} \frac{5n+7}{8n-11} = \frac{5}{8} \neq 0$, то ряд расходится.

Задача 100. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+8}{7n+4}$.

§ 9.4. БЕСКОНЕЧНО УБЫВАЮЩАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия — это геометрическая прогрессия со знаменателем q, для которого $|q| < 1$. Сумма элементов бесконечно убывающей геометрической прогрессии — это пример сходящегося ряда: $S = b_1 + b_1q + b_1q^2 + ... = b_1/(1 - q)$.

Пример 105. Сумма элементов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с $b_1 = 2$ и $q = \frac{1}{2}$ $(2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...)$ равна $b_1/(1 - q) = 2/(1 - \frac{1}{2}) = 4$.

Задача 101. Чему равна сумма элементов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с $b_1 = 4$ и $q = \frac{1}{3}$?

Глава 10

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 10.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции. Если искомая функция $y(x)$ — функция одной переменной, то это *обыкновенное дифференциальное уравнение.* Если уравнение содержит частные производные, то его называют *дифференциальным уравнением с частными производными.* Мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Порядок дифференциального уравнения — это наивысший порядок производных (дифференциалов) неизвестной функции, входящих в уравнение. Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.

Решение дифференциального уравнения — это функция $y = f(x)$, определенная на некотором промежутке, такая, что $F(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)) = 0$ для всех x из этого промежутка.

Пример 106. Дано дифференциальное уравнение $y'' + y = 0$. Проверим, что функция $y = \sin x$ является решением этого дифференциального уравнения для всех действительных x.

$y'' = (y')' = ((\sin x)')' = (\cos x)' = -\sin x$.

Тогда $y'' + y = -\sin x + \sin x = 0$.

Задача 102. Дано дифференциальное уравнение $y'' + y = 0$. Проверить, что функция $y = \cos x$ является решением этого дифференциального уравнения для всех действительных x.

Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка всегда содержит n произвольных постоянных, не зависимых друг от друга. Задав n начальных условий, мы можем найти значения этих постоянных. Мы ограничимся рассмотрение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффицентами.

§ 10.2. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Это уравнения вида $ay'' + by' + cy = 0$, где a, b, c — коэффициенты. Составляем *характеристическое уравнение* $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ и решаем его. Если это квадратное уравнение имеет два различных действительных корня $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то общее решение дифференциального уравнения $y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 107. Решим дифференциальное уравнение $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ и решаем его. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Тогда общее решение дифференциального уравнения $y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Задача 103. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 2y' - 3y = 0$.

Если характеристическое уравнение $ay'' + by' + cy = 0$ имеет только один действительный корень λ, то общее решение дифференциального уравнения $y(x) = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x}$.

Пример 108. Решим дифференциальное уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ и решаем его. Получаем кратный корень $\lambda = 2$. Тогда общее решение дифференциального уравнения $y(x) = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x} = (C_1 + C_2x)e^{2x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Задача 104. Решить дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Если характеристическое уравнение $ay'' + by' + cy = 0$ не имеет действительных корней (то есть $D = b^2 - 4ac < 0$), то положим $\alpha = -b/(2a)$, $\beta = \sqrt{|D|}\,/(2a)$. Тогда общее решение дифференциального уравнения $y(x) = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 109. Решим дифференциальное уравнение $y'' + 4y' + 13y = 0$.

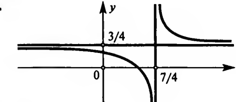
Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$. Здесь $a = 1$, $b = 4$, $c = 13$. $D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times 13 = -36 < 0$. $\alpha = -b/(2a) = -4/(2 \times 1) = -2$, $\beta = \sqrt{|D|}\,/(2a) = \sqrt{|-36|}\,/(2 \times 1) = 3$.

Тогда общее решение дифференциального уравнения $y(x) = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x = C_1e^{-2x}\cos 3x + C_2e^{-2x}\sin 3x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

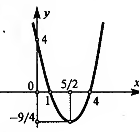
Задача 105. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 4y = 0$.

Ответы

2. $x \to x + 5 \to (x + 5)^2 \to 1/(x + 5)^2$.
5. 2,43.
6.

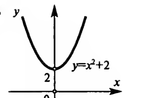


7. 3 и 4.
8. 4.
9. Действительных решений нет.
10. $(x - 3)(x - 4)$.
11. $(x - 4)^2$.
12. $3(x - 2/3)^2 + 11/3$.
13.

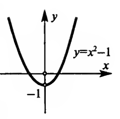


14. [2; 6].
15. $(-\infty; 4) \cup (5; \infty)$.
16. Действительных решений нет.
17. −4.
18. Правильная.
19. Неправильная.
20. $[-3; 1) \cup (1; 2] \cup (3; 4]$.
21. $(-4; 1) \cup (1; 3) \cup (3; \infty)$.

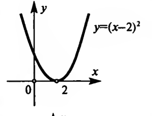
22.



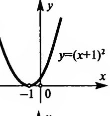
23.



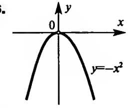
24.



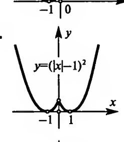
25.



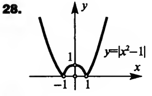
26.



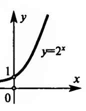
27.



28.



29.



30. 2.
31. Центр (−5; 1), радиус $\sqrt{3}$.
32. Центр (0; 0), радиус 2.
33. $\pi/6$.
34. 135°.
36. n^2.
37. 5, 9, 13, 17, ...
38. 6, 2, −2, −6, −10, ...
39. 69.
40. −94.
41. 629.

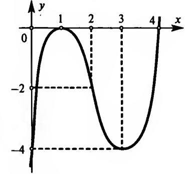
42. 152.
43. 5, 20, 80, 320, ...
44. 6, −24, 96, −384, ...
45. 1310720.
46. 393216.
47. 1705.
48. 19662.
49. $n > 1/\varepsilon$.
55. $1/(n + 1) < 1/n$, $|1/n| < 2$.
56. 22.
57. 7/4.
58. −1.
59. e^{15}.
62. −0,271.
63. 7.
64. $2x + \sin x$.
65. $21x^6$.
66. $(3x^2 + x^3)e^x$.
67. $\frac{-2}{x^3}$.
68. $\frac{1}{x\ln 10}$.
69. $\frac{2x\cos x + x^2\sin x}{\cos^2 x}$.
70. $-3\sin 3x$.
71. $\frac{3x^2}{\cos^2 x^3}$.
72. $\frac{3x^2\cos x^3}{(\sin x^3)\ln 2}$.
73. $-\cos x$.
74. 1.
75. 7/3.
76. $y = 27x - 54$.
77. $2xdx$.
78. 4,12.
79.

	$(-\infty, 4)$	4	$(4, +\infty)$
f'	+	0	−
f	Возрастает	Max	Убывает

80.

	$(-\pi, -\pi/2)$	$-\pi/2$	$(-\pi/2, 0)$
f''	+	0	–
f	Выпукла вниз	Точка перегиба	Выпукла вверх

81.



82. 10 и –22.

83. $(x^3)' = 3x^2$.

84. $x^3 + 10\sqrt{x} - \ln|x| + 8\sin x + 9\operatorname{tg} x + 15e^x + C$.

85. $(x - 1)e^x + C$.

86. $1/2\ln|x^2 - 6| + C$.

87. $\ln|x - 9| + C$.

88. $1/7\sin(7x + 3) + C$.

89. $2/3\sqrt{3x + 5} + C$.

90. 2.

91. 14/3.

92. 4.

93. e^2.

94. $1/2(\ln 10 - \ln 2)$.

98. –4.

99. Нет.

100. Расходится.

101. 6.

103. $C_1e^x + C_2e^{-3x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

104. $y(x) = (C_1 + C_2x)e^{3x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

105. $y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Программа учебного курса «Математический анализ»

1. Множество. Способы задания множеств. Подмножество. Равные множества. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, дополнение.

2. Постоянные и переменные величины. Интервалы, полуинтервалы, отрезки, промежутки. Понятие функции. Область определения и область значений функции. Способы задания функции.

3. Элементы поведения функции. Сложная функция.

4. Линейная интерполяция.

5. Дробно-линейная функция.

6. Квадратичная функция. Квадратные уравнения. Разложение выражения $ax^2 + bx + c$ на множители. Выделение в выражении $ax^2 + bx + c$ полного квадрата. График квадратичной функции. Квадратные неравенства.

7. Рациональная функция (правильная и неправильная). Рациональные неравенства. Метод интервалов.

8. Преобразования графиков. Построение графика функции $y = f(x) + B$. Построение графика функции $y = f(x + b)$.

9. Построение графика функции $y = -f(x)$. Построение графика функции $y = f(|x|)$. Построение графика функции $y = |f(x)|$.

10. Показательная и логарифмическая функции. Взаимно-обратные функции.

11. Окружность. Тригонометрические функции.

12. Последовательность. Арифметическая прогрессия. Нахождение n-го элемента арифметической прогрессии. Нахождение суммы первых n элементов арифметической прогрессии.

13. Геометрическая прогрессия. Нахождение n-го элемента геометрической прогрессии. Нахождение суммы первых n элементов геометрической прогрессии.

14. Предел последовательности. Монотонные последовательности. Ограниченная последовательность. Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности.

15. Предел функции. Теоремы о пределах.

16. Раскрытие неопределенностей.

17. Замечательные пределы.

18. Непрерывность. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

19. Приращения аргумента и функции. Понятие производной. Правила дифференцирования.

20. Первая таблица производных.

21. Производная сложной функции. Вторая таблица производных.

22. Производные высших порядков.

23. Правило Лопиталя.

24. Уравнение касательной. Геометрический смысл производной.

25. Дифференциал. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

26. Возрастание и убывание функции. Локальные экстремумы. Достаточное условие локального экстремума.

27. Выпуклость вверх и вниз. Точки перегиба.

28. Исследование функций и построение графиков.

29. Первообразная. Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла.

30. Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование. Понятие о неберущихся интегралах.

31. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

32. Замена переменной в неопределенном интеграле.

33. Определенный интеграл. Основные свойства определенного интеграла.

34. Формула Ньютона-Лейбница.

35. Геометрический смысл определенного интеграла.

36. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

37. Замена переменной в определенном интеграле.

38. Ряды, виды рядов. Частичная сумма ряда. Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости.

39. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

40. Дифференциальные уравнения. Порядок дифференциального уравнения. Решение дифференциального уравнения.

41. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

42. Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке.

Задачи для контрольной работы по курсу «Математический анализ»

1—10. Для множеств A и B найти объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$, разность $A \setminus B$.

	A	B
1	3, 2, 1, 5, 9	5, 9, 7
2	6, 9, 2, 3, 4	1, 4, 6
3	4, 5, 1, 3, 8	4, 1, 5, 9
4	9, 4, 6, 8, 3	1, 4, 9
5	1, 9, 5, 6, 4	5, 1, 3, 0

	A	B
6	9, 8, 0, 6, 2	8, 4, 2, 6
7	8, 7, 0, 1, 5	8, 4, 6
8	3, 1, 8, 6, 5	3, 1, 2, 6
9	7, 9, 5, 2, 4	7,9,1,4,0
10	1, 8, 6, 3	3, 2, 5, 7

11—20. Зная значения функции в точках a, b, c, найти при помощи линейной интерполяции значение функции в точке x.

	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	1,43	1,28	1,12	1,52	1,71	1,84	1,08	1,15	3,06	3,44
$f(a)$	2,05	2,02	2,23	2,01	2,06	2,10	2,06	2,28	4,28	4,01
b	1,45	1,41	1,23	1,71	1,85	1,92	1,28	1,60	3,34	3,66
$f(b)$	2,25	2,36	2,36	2,58	2,66	2,13	2,15	2,34	4,89	4,05
c	1,57	1,86	1,98	1,82	1,89	1,99	1,99	1,69	3,71	3,86
$f(c)$	2,41	2,44	2,62	2,74	2,93	2,74	2,82	2,47	4,93	4,57
x	1,54	1,51	1,64	1,69	1,79	1,91	1,77	1,38	3,39	3,72

21—30. Изобразить схематически график функции $y = \dfrac{kx + p}{mx + n}$.

	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
k	9	3	8	9	1	6	3	8	6	7
p	7	7	4	1	2	5	6	5	3	3
m	3	5	2	2	8	7	1	2	5	9
n	2	4	6	5	7	4	8	6	7	6

31—40. Выделить в выражении $kx^2 + px + m$ полный квадрат.

	31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
k	9	3	8	9	1	6	3	8	6	7
p	7	7	4	1	2	5	6	5	3	3
m	3	5	2	2	8	7	1	2	5	9

41–50. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to k}(mx^2+n)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{px+q}{rx+s}$; в) $\lim\limits_{x\to d}\dfrac{ax^2+bx+c}{x-d}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+k/x)^{mx}$.

	k	m	n	p	q	r	s	a	b	c	d
41	9	7	3	2	5	3	7	1	–4	3	3
42	3	7	5	4	2	4	8	1	–11	10	10
43	8	4	2	6	8	9	5	1	4	–5	–5
44	9	1	2	5	2	9	3	1	9	14	–7
45	1	2	8	7	9	7	8	1	–24	128	8
46	6	5	7	4	7	1	3	1	–9	14	2
47	3	6	1	8	5	4	7	1	2	–8	–4
48	8	5	2	6	9	7	6	3	17	–6	–6
49	6	3	5	7	3	2	5	2	–21	–11	11
50	7	3	9	6	4	5	7	5	–24	–5	5

51–60. Найти производную функций:

51. а) $\dfrac{x^2}{x-2}$; б) $x^3\sin x$;

52. а) $\dfrac{x^2}{3x^2-1}$; б) $(x^2-1)e^x$;

53. а) $\dfrac{2x+5}{3x-2}$; б) $(x-8)5^x$;

54. а) $\dfrac{1}{4x^2+1}$; б) $(x+10)3^x$;

55. а) $\dfrac{x+2}{3x-1}$; б) $(x+4)e^x$;

56. а) $\dfrac{3x-7}{x+4}$; б) $(x+9)\ln x$;

57. а) $\dfrac{x^2-2x+6}{x-1}$; б) $(x-7)\cos x$;

58. а) $\dfrac{x^2+6}{x^2-9}$; б) $(x-4)\mathrm{tg}\,x$;

59. а) $\dfrac{5-x^2}{2+x^2}$; б) $(x+2)\mathrm{ctg}\,x$;

60. а) $\dfrac{x}{4-x}$; б) $x^3\ln x$.

61–70. Для функции $ax^3 + bx^2 + cx + d$ найти производные 1-го и 2-го порядков, дифференциал, интервалы монотонности, локальные экстремумы, интервалы выпуклости вверх (вниз), точки перегиба, наибольшее и наименьшее значения на отрезке [0, 2].

	61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**
a	1	1	1	1	1	4	1	1	–1	–2
b	6	–3	12	–6	–3	24	3	–12	–3	0
c	–15	–24	45	9	–9	36	–24	45	9	24
d	8	–28	50	–4	–5	16	28	50	–5	0

71–80. Найти интегралы:

71. а) $\int(9x + 7\sin x)$; б) $\int \frac{dx}{x+3}$; в) $\int_2^5 e^x dx$;

72. а) $\int(3x^2 - 5\cos x)$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$; в) $\int_2^3 2^x dx$;

73. а) $\int(8x^3 + 4\sqrt{x})dx$; б) $\int \frac{xdx}{x^2+6}$; в) $\int_4^5 3^x dx$;

74. а) $\int(3/x^2 - 2\cos x)$; б) $\int\sin(x+9)dx$; в) $\int_2^3 \sqrt{x}\, dx$;

75. а) $\int(4/x + \sqrt{x})dx$; б) $\int\cos(7x-9)dx$; в) $\int_1^4 x^3 dx$;

76. а) $\int(9/\cos^2 x - 2x)dx$; б) $\int \frac{dx}{x+9}$; в) $\int_2^5 \frac{dx}{x^2}$;

77. а) $\int(9/\sin^2 x + 6x^2)dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+5}}$; в) $\int_1^4 \frac{dx}{x}$;

78. а) $\int \frac{dx}{x^2-1}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$; в) $\int_2^4 \frac{dx}{x^3}$;

79. а) $\int(4\sin x + 5x^3)dx$; б) $\int \frac{xdx}{x^2+6}$; в) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

80. а) $\int(3x^2 - 5\sqrt{x})dx$; б) $\int \frac{xdx}{x^2-3}$; в) $\int_1^2 4^x dx$.

81–90. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{kn+m}{pn+q}$ расходится.

	81	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**
k	−7	−9	−11	−13	−15	−17	−19	−21	7	9
m	12	20	30	42	56	72	90	110	12	20
p	6	8	−10	−12	−14	−16	−18	20	−6	−8
q	9	16	25	36	49	64	81	100	9	16

91–100. Решить дифференциальные уравнения:
а) $y'' + ky' + m = 0$;
б) $y'' + ny' + p = 0$;
в) $y'' + qy' + r = 0$.

	k	*m*	*n*	*p*	*q*	*r*
91	−7	12	6	9	0	9
92	−9	20	8	16	0	16
93	−11	30	−10	25	0	25
94	−13	42	−12	36	0	36
95	−15	56	−14	49	0	49
96	−17	72	−16	64	0	64
97	−19	90	−18	81	0	81
98	−21	110	20	100	0	100
99	7	12	−6	9	0	121
100	9	20	−8	16	0	144

Раздел III

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Под *опытом* будем понимать выполнение определенных условий, при которых наблюдается изучаемое явление. Стрельба по мишени, бросание монеты, вынимание шаров из урны — все это примеры опытов. *Событие* — это результат опыта. Будем обозначать события латинскими буквами A, B, C, ...

Пример 1. Производится выстрел по мишени. Событие A = {попадание в мишень}, событие B = {промах}.

Пример 2. Бросают монету. Событие C = {выпал герб}, событие D = {выпало число}.

Пример 3. В урне находятся черные и белые шары. Из урны извлекают один шар. Событие E = {извлечен черный шар}, событие F = = {извлечен белый шар}.

Пример 4. Бросают кубик. Событие G = {выпало число 1}, событие N = {выпало число 2}.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет в данном опыте.

Пример 5. В урне находятся только черные шары. Из урны извлекают один шар. Событие H = {извлечен черный шар} является достоверным, так как всегда вынимают черный шар.

Пример 6. Бросают кубик. Событие K = {выпало какое-то число от 1 до 6} является достоверным, так как всегда выпадает какое-то число от 1 до 6.

Задача 1. Привести пример достоверного события.

Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти в данном опыте.

Пример 7. Вернемся к примеру 5. Событие L = {извлечен белый шар} является невозможным, так как таких шаров в урне нет.

Пример 8. Вернемся к примеру 6. Событие M = {выпало число 7} является невозможным, так как всегда выпадает какое-то число от 1 до 6.

Задача 2. Привести пример невозможного события.

Событие называется *случайным*, если оно может произойти в данном опыте, а может и не произойти.

Пример 9. События A и B из примера 1, события C и D из примера 2, события E и F из примера 3, события G и N из примера 4 — это примеры случайных событий.

Задача 3. Привести пример случайного события.

Два события называются *совместными в данном опыте*, если появление одного из них не исключает появление другого.

Пример 10. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Событие A = {попадание 1-го стрелка в мишень}, событие B = {попадание 2-го стрелка в мишень}. Это совместные события, так как возможна ситуация, когда оба стрелка попадут в мишень.

Пример 11. Бросают две монеты. Событие C = {выпал герб на 1-й монете}, событие D = {выпал герб на 2-й монете}. Это совместные события, так как возможна ситуация, когда на обеих монетах выпадет герб.

Пример 12. В 1-й урне находятся черные и белые шары, а во 2-й — красные и синие. Из каждой урны извлекают по одному шару. Событие E = {из 1-й урны извлечен черный шар}, событие F = {из 2-й урны извлечен красный шар}. Это совместные события, так как возможна ситуация, когда события E и F произойдут одновременно.

Пример 13. Бросают два кубика. Событие G = {на 1-м кубике выпало число 1}, событие N = {на 2-м кубике выпало число 1}. Это совместные события, так как возможна ситуация, когда одновременно выпадут две единицы.

Задача 4. Привести пример совместных событий.

Два события называются *несовместными в данном опыте*, если появление одного из них исключает появление другого.

Пример 14. События A и B из примера 1 — несовместные события, события C и D из примера 2 — несовместные события, события E и F из примера 3 — несовместиые события, события G и N из примера 4 — несовместиые события.

Задача 5. Привести пример несовместных событий.

Множество событий называется *полной группой событий*, если они попарно несовместны (то есть никакие два из них не могут произойти одновременно) и какое-то из них обязательно произойдет.

Противоположные события — это полная группа из двух событий. Одно из противоположных событий обозначается буквой, другое — той же буквой с чертой (например, A и $\overline{A}$).

Пример 15. Бросают кубик. Событие A_i = {выпало число i}, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Эти 6 событий образуют полную группу событий, так как всегда выпадает какое-то число от 1 до 6 и невозможна ситуация, когда при одном бросании выпадают сразу два числа.

Пример 16. События C и D из примера 2 — противоположные события: $D = \overline{C}$.

Задача 6. Привести пример полной группы событий.

Задача 7. Привести пример противоположных событий.

События называются *равновозможными*, если нет оснований считать, что одно из них происходит чаще других. Каждое равновозможное событие, которое может произойти в данном опыте, называется *элементарным исходом*.

Пример 17. События из примера 15 — равновозможные события. A_i — элементарные исходы, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. События из примера 16 — равновозможные события. C и $\overline{C}$ — элементарные исходы.

Задача 8. Привести пример равновозможных событий.

Элементарные исходы, при которых наступает некоторое событие, называются *элементарными исходами, благоприятствующими этому событию.*

Пример 18. В примере 15 событию A = {выпало четное число} благоприятствует выпадение 2, 4 или 6 (то есть элементарные исходы A_i, $i = 2, 4, 6$). Событию B = {выпало простое число} благоприятствует выпадение 2, 3 или 5 (то есть элементарные исходы A_i, $i = 2, 3, 5$).

Задача 9. Какие элементарные исходы благоприятствуют событиям C = {выпало нечетное число} и D = {выпал делитель числа 6}?

Вероятностью события A называется отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числу n всех равновозможных исходов опыта: $P(A) = m/n$.

Пример 19. В примере 18 событию A = {выпало четное число} благоприятствуют $m = 3$ элементарных исхода, а всего возможно $n = 6$ элементарных исходов. Следовательно, $P(A) = m/n = 3/6 = 0{,}5$.

Пример 20. При бросании монеты P(выпал герб) = P(выпало число) = 0,5.

Задача 10. Найти вероятности событий C и D в задаче 9.

Простейшие свойства вероятности.
1. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
2. Вероятность достоверного события равна 1.
3. Вероятность невозможного события равна 0.
4. $0 < P(A) < 1$, где A — случайное событие.

Глава 2

ДЕЙСТВИЯ С ВЕРОЯТНОСТЯМИ

§ 2.1. СУММА СОБЫТИЙ

Суммой $A + B$ событий A и B называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них, то есть могут появиться либо только событие A, либо только событие B, либо события A и B одновременно.

Пример 21. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Событие A = {попадание 1-го стрелка}, событие B = {попадание 2-го стрелка}. Тогда сумма $A + B$ событий A и B — это попадание в мишень хотя бы одного из этих стрелков.

Пример 22. Подбрасывают две монеты. Событие C = {выпал герб на 1-й монете}, событие D = {выпал герб на 2-й монете}. Тогда сумма $C + D$ событий C и D — это появление хотя бы одного герба в двух бросаниях.

Пример 23. Из урны, в которой находятся белые и черные шары, вынимают два шара. Событие E = {1-й вынутый шар черный}, событие F = {2-й вынутый шар черный}. Тогда сумма $E + F$ событий E и F — это появление хотя бы одного черного шара.

Пример 24. Подбрасывают два раза кубик. Событие G = {при 1-м бросании выпало 1}, событие H = {при 2-м бросании выпало 1}. Тогда сумма $G + H$ событий G и H — это появление хотя бы одной единицы в двух бросаниях кубика.

Задача 11. Привести пример суммы событий.

§ 2.2. ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Теорема. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей: $P(A + B) = P(A) + P(B)$, где A и B — несовместные события.

Замечание. Теорема верна и для n попарно несовместных событий.

Следствие. Рассмотрим противоположные события A и $\overline{A}$. Эти события несовместны. Тогда событие $A+\overline{A}$ заключается в том, что произойдет либо только событие A, либо только событие $\overline{A}$, то есть событие $A+\overline{A}$ достоверное. Тогда $P(A+\overline{A}) = 1$. Но $P(A+\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Поэтому $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

§ 2.3. ПРОИЗВЕДЕНИЕ СОБЫТИЙ

Произведением AB событий A и B называется событие, состоящее в их одновременном появлении.

Пример 25. Произведение AB событий A и B из примера 21 — это попадание в мишень обоих стрелков.

Пример 26. Произведение CD событий C и D из примера 22 — это выпадение двух гербов.

Пример 27. Произведение EF событий E и F из примера 23 — это то, что оба вынутых шара будут черного цвета.

Пример 28. Произведение GH событий G и H из примера 24 — это выпадение двух единиц при двух бросаниях кубика.

Задача 12. Привести пример произведения событий.

§ 2.4. ЗАВИСИМЫЕ И НЕЗАВИСИМЫЕ СОБЫТИЯ

Два события называются *зависимыми*, если вероятность появления одного из них зависит от появления или непоявления другого. Два события называются *независимыми*, если вероятность появления одного из них не зависит от появления или непоявления другого.

Пример 29. Из урны, в которой находятся 8 белых и 12 черных шаров, последовательно вынимают два шара и обратно не возвращают. Событие $A = \{$1-й вынутый шар черный$\}$, событие $B = \{$2-й вынутый шар черный$\}$. Выясним, зависимы ли события A и B.

Пусть произошло событие A, то есть 1-й вынутый шар черный. Тогда в урне осталось 19 шаров, из них 11 черных. Поэтому вероятность события B равна $P(B) = 11/19$ (всего 19 вариантов, из них 11 благоприятствуют событию B).

Пусть теперь не произошло событие A, то есть произошло противоположное событие $\overline{A} = \{$1-й вынутый шар не черный$\} = \{$1-й выну-

тый шар белый}. Тогда в урне осталось 19 шаров, из них по-прежнему 12 черных. Поэтому вероятность события B $P(B) = 12/19$ (всего 19 вариантов, из них 12 благоприятствуют событию B).

Мы видим, что вероятность появления события B зависит от появления или непоявления события A.

Задача 13. Привести пример зависимых событий.

Задача 14. Из урны, в которой находятся 8 белых и 12 черных шаров, извлекают один шар и возвращают его обратно. Затем извлекают еще один шар. Событие A = {1-й вынутый шар черный}, событие B = {2-й вынутый шар черный}. Выяснить, зависимы ли события A и B.

§ 2.5. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Теорема. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей: $P(AB) = P(A)P(B)$, где A и B — независимые события.

Пример 30. Система, состоящая из двух работающих независимо друг от друга устройств, функционирует исправно только при одновременной работе этих устройств. Вероятности работы 1-го и 2-го устройств равны соответственно 0,8 и 0,9. Какова вероятность функционирования системы в целом?

Событие A = {работает 1-е устройство}, событие B = {работает 2-е устройство}. По условию $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}9$. Произведение событий AB = {работают оба устройства} = {работает система}.

Так как события A и B независимы (устройства работают независимо друг от друга), то P{работает система} $= P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}72$.

Пример 31. Найдем вероятность выпадения двух единиц при двух бросаниях кубика.

Событие A = {при 1-м бросании выпало 1}, событие B = {при 2-м бросании выпало 1}. Тогда AB = {оба раза выпало 1}.

A и B — независимые события, так как результаты при втором бросании кубика не зависят от того, что выпало при первом бросании. $P(A) = P(B) = 1/6$. Тогда $P(AB) = P(A)P(B) = 1/6 \times 1/6 = 1/36$.

Задача 15. Найти вероятность выпадения двух гербов при двух бросаниях монеты.

§ 2.6. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Условной вероятностью $P(B|A)$ называется вероятность события B при условии, что событие A произошло. Тогда для зависимых событий $P(B|A) \neq P(B|\overline{A})$. Для независимых событий $P(B|A) = P(B|\overline{A}) = P(B)$.

Пример 32. В примере 29 $P(B|A)$ = P(2-й вынутый шар черный при условии, что 1-й вынутый шар черный) = P(2-й вынутый шар черный | 1-й вынутый шар черный) = 11/19.

$P(B|\overline{A})$ = P(2-й вынутый шар черный при условии, что 1-й вынутый шар не черный) = P(2-й вынутый шар черный | 1-й вынутый шар не черный) = 12/19.

Поэтому события A и B зависимы.

Задача 16. Из урны, в которой находятся 3 белых и 7 черных шаров, последовательно вынимают два шара и обратно не возвращают. Известно, что 1-й вынутый шар белый. Какова вероятность того, что и 2-й вынутый шар белый?

§ 2.7. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Теорема. Для зависимых событий A и B верно следующее: $P(AB) = P(A)P(B|A)$.

Пример 33. Вернемся к примерам 29 и 32. Найдем вероятность того, что из урны вынуты два черных шара, то есть найдем вероятность события AB. P(из урны вынуты два черных шара) = $P(AB)$ = $P(A)P(B|A)$ = P(1-й вынутый шар черный) × P(2-й вынутый шар черный при условии, что 1-й вынутый шар черный) = 12/20×11/19 = 33/95.

Пример 34. Команде предстоит сыграть полуфинал и, возможно, финал. Вероятность победы в полуфинале сами игроки оценивают в 0,6, а вероятность победы в финале (при условии победы в полуфинале) — в 0,5. Какова вероятность, по мнению игроков, того, что команда станет чемпионом?

Событие A = {победа в полуфинале}, событие B = {победа в финале}. Событие {команда станет чемпионом} = {победы в полуфинале и финале} = AB. Тогда $P(AB)$ = $P(A)P(B|A)$ = P(победа в полуфинале)×P(победа в финале при условии победы в полуфинале) = 0,6×0,5 = 0,3.

Задача 17. В задаче 16 найти вероятность того, что 1-й вынутый шар белый, а 2-й вынутый шар черный.

§ 2.8. ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ ДВУХ СОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Теорема. Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна сумме их вероятностей без учета вероятности произведения этих событий: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Если события A и B несовместны, то AB — невозможное событие. Тогда $P(AB) = 0$ (мы получаем формулу из § 2.2).

Пример 35. Найдем вероятность выпадения хотя бы одной единицы при двух бросаниях кубика в примере 31.

Событие A = {при 1-м бросании выпало 1}, событие B = {при 2-м бросании выпало 1}. Тогда $A + B$ = {хотя бы один раз выпало 1}.

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 1/6 + 1/6 - 1/36 = 11/36$.

Задача 18. Найти вероятность выпадения хотя бы одного герба при двух бросаниях монеты.

Глава 3

ДЕРЕВО ВЕРОЯТНОСТЕЙ

На практике часто возникают ситуации, когда требуется определить вероятность события, которое может произойти с одним из несовместных событий, образующих полную группу событий. Ответ дает так называемая формула полной вероятности. Но мы рассмотрим более простой и наглядный подход — *дерево вероятностей.*

Дерево вероятностей рисуют слева направо. Опыты обозначаются в виде кругов, а каждый исход — сплошной линией (ветвью), идущей от соответствующего круга. Около каждой ветви указывается вероятность соответствующего исхода. Сумма вероятностей на ветвях, выходящих из одного круга, равна единице. Двигаясь по ветвям и перемножая соответствующие вероятности, в конце пути мы получаем вероятность сложного события. Сложив нужные вероятности, найдем вероятность искомого события.

Пример 36. В 1-й урне находятся 7 белых и 9 черных шаров, во 2-й урне находятся 6 белых и 4 черных шаров. Из 1-й урны во 2-ю переложили 2 шара, а затем из 2-й урны извлекли один шар. Найдем вероятность того, что этот шар белый.

Мы провели три опыта:

1) извлекли из 1-й урны первый шар и переложили его во 2-ю урну;

2) извлекли из 1-й урны второй шар и переложили его во 2-ю урну;

3) из 2-й урны извлекли один шар.

Поэтому дерево вероятностей содержит три уровня вершин. Так как каждый раз возможны два исхода, то из каждой вершины выходят две ветви. Над каждой ветвью пишем название соответствующего исхода (белый или черный), а под ветвью — вероятность появления этого исхода. Всего в нашем дереве 8 возможных путей:

1) белый, белый, белый;

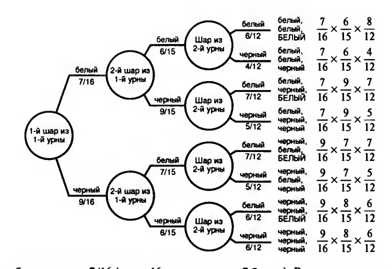
2) белый, белый, черный;

...;

8) черный, черный, черный.

Это означает, что возможно 8 сложных событий.

Событие «белый, белый, белый» говорит о том, что оба переложенных шара из 1-й урны во 2-ю были белого цвета и что из 2-й урны извлекли белый шар. Вероятность того, что первый шар из 1-й урны был



белым, равна 7/16 (всего 16 шаров, из них 7 белых). Вероятность того, что второй шар из 1-й урны был белым, равна 6/15 (всего осталось 15 шаров, но белых осталось 6). Вероятность того, что из 2-й урны извлекли белый шар, равна 8/12 (всего было 10 шаров (из них 6 белых), добавили 2 белых шара). Все вероятности изобразим под соответствующими линиями. Перемножив полученные числа 7/16×6/15×8/12, мы найдем вероятность появления события «белый, белый, белый».

Событие «черный, белый, белый» говорит о том, что сначала переложили из 1-й урны во 2-ю черный шар, затем белый и что из 2-й урны извлекли белый шар. Вероятность того, что первый шар из 1-й урны был черным, равна 9/16 (всего 16 шаров, из них 9 черных). Вероятность того, что второй шар из 1-й урны был белым, равна 7/15 (всего осталось 15 шаров, но белых по-прежнему 7). Вероятность того, что из 2-й урны извлекли белый шар, равна 7/12 (всего было 10 шаров (из них 6 белых), добавили черный и белый шары). Все вероятности изобразим под соответствующими линиями. Перемножив полученные числа 9/16×7/15×7/12, мы найдем вероятность появления события «черный, белый, белый». И т. д.

Нас интересует, когда шар из 2-й урны будет белым. Надо сложить вероятности тех событий, у которых на последнем месте написано «белый»: 7/16×6/15×8/12 + 7/16×9/15×7/12 + 9/16×7/15×7/12 + + 9/16×8/15×6/12 = 55/96.

Задача 19. В 1-й урне находятся 8 белых и 6 черных шаров, во 2-й урне находятся 5 белых и 7 черных шаров. Из 1-й урны во 2-ю переложили 2 шара, а затем из 2-й урны извлекли один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Глава 4

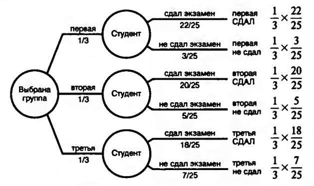
ФОРМУЛА БАЙЕСА

Часто, приступая к анализу вероятностей, мы имеем предварительные (*априорные*) значения вероятностей интересующих нас событий. Проведя опыт и применив формулу Байеса, мы получим новые (*апостериорные*) значения вероятностей.

Предположим, что возможно появление события A вместе с одним из событий, образующих полную группу событий (их называют *гипотезами*). Вероятности гипотез известны. Провели опыт, и произошло событие A. Как изменились вероятности гипотез? Строим дерево вероятностей и по нему находим ответ.

Пример 37. В каждой из трех групп по 25 студентов. Число студентов группы, сдавших экзамен по математике, равно 22, 20 и 18 соответственно. Случайно выбранный студент сдал экзамен по математике. Какова вероятность, что это студент первой группы?

Проводим два опыта: 1) случайно выбираем группу; 2) случайно выбираем студента из этой группы. Строим дерево вероятностей.



Вероятность выбрать студента, сдавшего экзамен по математике, равна $1/3\times22/25 + 1/3\times20/25 + 1/3\times18/25 = 60/75$. Вероятность выбрать студента 1-й группы, сдавшего экзамен по математике, равна $1/3\times22/25 = 22/75$.

Разделив второе из этих чисел на первое, мы и получим ответ задачи: $(22/75)/(60/75) = 11/30$.

Задача 20. На заводах *A* и *B* изготовлено 75% и 25% всех деталей. Из прошлых данных известно, что 10% деталей завода *A* и 20% деталей завода *B* оказываются бракованными. Случайно выбранная деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена на заводе *A*?

Глава 5

ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ

§ 5.1. СХЕМА БЕРНУЛЛИ

Производится серия из n независимых испытаний. В каждом из них вероятность появления события A постоянна и равна p. Вероятность появления события «не-A» $= \overline{A}$ (то есть вероятность непоявления события A) равна $q = 1 - p$. Тогда вероятность того, что событие A появится ровно k раз, равна $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — *биномиальный коэффициент*, $n! = 1{\times}2{\times}...{\times}n$ — *факториал числа*. Считается, что $0! = 1$.

Пример 38. Монета подбрасывается $n = 6$ раз. Какова вероятность выпадения ровно $k = 2$ гербов?

Событие A = {выпал герб}. $p = P(A) = 0{,}5$. $q = 1 - p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = p_6(2) = C_6^2 0{,}5^2{\times}0{,}5^{6-2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} 0{,}5^2{\times}0{,}5^{6-2} = 15/64.$$

Задача 21. Кубик подбрасывается $n = 5$ раз. Какова вероятность выпадения ровно $k = 3$ единиц?

Замечание. Если воспользоваться статистическими функциями мастера функций f_x пакета Excel, то $p_n(k)$ = БИНОМРАСП(k; n; p; 0) и $n!$ = ПЕРЕСТ(n; n).

По формуле $p_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) = \sum\limits_{k=k_1}^{k_2} p_n(k)$ находится вероятность того, что событие A в n независимых испытаниях наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз.

Пример 39. Монета подбрасывается $n = 6$ раз. Какова вероятность выпадения от двух до трех гербов?

$$k_1 = 2,\ k_2 = 3,\ p_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) = p_6(2 \leqslant k \leqslant 3) = p_6(2) + p_6(3) = 15/64 + \frac{6!}{3!(6-3)!} 0{,}5^3{\times}0{,}5^{6-3} = 35/64.$$

Задача 22. Кубик подбрасывается $n = 5$ раз. Какова вероятность выпадения от 3 до 5 единиц?

Замечание. $p_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) = p_n(k \leqslant k_2) - p_n(k \leqslant k_1 - 1) =$ БИНОМРАСП(k_2; n; p; 1) – БИНОМРАСП($k_1 - 1$; n; p; 1).

Если не пользоваться пакетом Excel, то при больших значениях n схема Бернулли приводит к большим выкладкам. Поэтому значение вероятности находят приближенно, используя различные теоремы.

§ 5.2. ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА

Если n велико, то используют вспомогательную величину $x = (k - np)/\sqrt{npq}$ и определяют искомую вероятность по формуле:

$p_n(k) \approx \varphi(x)/\sqrt{npq}$, где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}/2$, $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Значения функции $\varphi(x)$ берутся из специальной таблицы.

Можно также воспользоваться мастером функций f_x пакета Excel: $\varphi(x) =$ НОРМРАСП(x; 0; 1; 0).

Пример 40. Производится серия из $n = 200$ независимых испытаний. В каждом из них вероятность появления события A постоянна и равна $p = 0{,}3$. Какова вероятность того, что событие A появится ровно $k = 40$ раз?

$q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$, $x = (k - np)/\sqrt{npq} = (40 - 200\times0{,}3)/\sqrt{200\times0{,}3\times0{,}7} \approx -3{,}09$, $p_{200}(40) \approx \varphi(x)/\sqrt{npq} \approx \varphi(-3{,}09)/\sqrt{200\times0{,}3\times0{,}7}$ $\approx 0{,}0005$.

Задача 23. Производится серия из $n = 180$ независимых испытаний. В каждом из них вероятность появления события A постоянна и равна $p = 0{,}4$. Какова вероятность того, что событие A появится ровно $k = 45$ раз?

§ 5.3. ТЕОРЕМА ПУАССОНА

Если вероятность $p \leqslant 0{,}1$, то формула Муавра-Лапласа непригодна. В этом случае применяют теорему Пуассона. Положим $\lambda = np$. Тогда $p_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Можно воспользоваться мастером функций f_x пакета Excel: $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} =$ = ПУАССОН (k; λ; 0) и $p_n(k \leqslant k_2)$ = ПУАССОН (k_2; λ; 1).

Пример 41. Вероятность выхода прибора из строя равна $p = 0{,}005$. Найдем вероятность того, что из $n = 1000$ приборов $k = 6$ приборов выйдут из строя.

$p = 0{,}005 < 0{,}1$. Применим теорему Пуассона.

$\lambda = np = 1000 \times 0{,}005 = 5$.

$p_n(k) = p_{1000}(6) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{5^6}{6!}e^{-5} \approx 0{,}146.$

Задача 24. Вероятность выхода прибора из строя равна $p = 0{,}006$. Найти вероятность того, что из $n = 1500$ приборов $k = 7$ приборов выйдут из строя.

§ 5.4. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

Если n велико, то вводят величины $x_2 = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$, $x_1 = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$ и определяют вероятность по формуле: $p_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ — *функция Лапласа*. Значения функции $\Phi(x)$ берутся из специальной таблицы. Важно, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Можно также воспользоваться мастером функций f_x пакета Excel: $\Phi(x)$ = НОРМРАСП(x; 0; 1; 1) – 0,5. Полагают $\Phi(x) = 0{,}5$ при $x > 5$.

Пример 42. Производится серия из $n = 200$ независимых испытаний. В каждом из них вероятность появления события A постоянна и равна $p = 0{,}3$. Какова вероятность того, что событие A появится не менее $k_1 = 30$ раз и не более $k_2 = 50$ раз?

$q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

$x_1 = (k_1 - np)/\sqrt{npq} = (30 - 200 \times 0{,}3)/\sqrt{200 \times 0{,}3 \times 0{,}7} \approx -4{,}63.$

$x_2 = (k_2 - np)/\sqrt{npq} = (50 - 200 \times 0{,}3)/\sqrt{200 \times 0{,}3 \times 0{,}7} \approx -1{,}54.$

$p_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) = p_{200}(30 \leqslant k \leqslant 50) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(-1{,}54) - \Phi(-4{,}63) = \Phi(4{,}63) - \Phi(1{,}54) \approx 0{,}06.$

Задача 25. Производится серия из $n = 180$ независимых испытаний. В каждом из них вероятность появления события A постоянна и равна $p = 0{,}4$. Какова вероятность того, что событие A появится не менее $k_1 = 40$ раз и не более $k_2 = 55$ раз?

Глава 6

ПРОСТЕЙШИЙ ПОТОК СОБЫТИЙ

Поток событий — это последовательность событий, которые наступают в некоторые случайные моменты времени. Примеры потоков: поступления вызовов на АТС, на пункт неотложной медицинской помощи, прибытие самолетов в аэропорт.

Интенсивность потока λ — это среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Простейший (пуассоновский) поток событий — это такой поток событий, для которого вероятность $p_t(k)$ появления k событий за время t определяется формулой Пуассона $p_t(k) = (\lambda t)^k e^{-\lambda t}/k!$, где $k! = 1 \times 2 \times ... \times k$.

Пример 43. Среднее число самолетов, прибывающих в аэропорт за 1 минуту, равно 3. Определим вероятность того, что за время $t = 5$ минут прибудут:

а) 6 самолетов;

б) не менее двух самолетов.

Поток предполагается простейшим.

а) $\lambda = 3$, $p_t(k) = p_5(6) = (\lambda t)^k e^{-\lambda t}/k! = (3 \times 5)^6 e^{-3 \times 5}/6! \approx 0{,}005$.

б) События A = {прибыло не менее двух самолетов} и B = {прибыло менее двух самолетов} — это противоположные события. Поэтому сумма их вероятностей равна 1. Событие B есть сумма несовместных событий C = {не прибыло ни одного самолета} и D = {прибыл один самолет}.

Тогда $p_t(k \geqslant 2) = 1 - (k < 2) = 1 - (p_5(0) + p_5(1)) = 1 - ((3 \times 5)^0 e^{-3 \times 5}/0! + (3 \times 5)^1 e^{-3 \times 5}/1!) \approx 0{,}999995$.

Задача 26. Среднее число самолетов, прибывающих в аэропорт за 1 минуту, равно 2. Найти вероятность того, что за время $t = 4$ минуты прибудут:

а) 3 самолета;

б) не менее трех самолетов.

Поток предполагается простейшим.

Замечание. Мастер функций f_x пакета Excel позволяет быстро вычислить $k!$, $p_t(k)$ и $p_t(k \leq k_2)$. $k!$ = ПЕРЕСТ (k; k); $p_t(k)$ = ПУАССОН (k; λt; 0); $p_t(k \leq k_2)$ = ПУАССОН (k_2; λt; 1).

Простейший поток обладает следующими свойствами:

✧ *стационарность* (постоянное число событий в единицу времени);

✧ *отсутствие последействия* (независимость числа событий после любого момента времени от числа событий до него);

✧ *ординарность* (практически невозможно одновременное наступление нескольких событий).

Глава 7

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА

Относительная частота события A (или просто частота) — это отношение числа опытов m, где появилось это событие, к общему числу опытов n: $w(A) = m/n$.

Пример 44. Произведено $n = 100$ выстрелов, зарегистрировано $m = 80$ попаданий. Событие A = {попадание в цель}. Тогда относительная частота события A равна $w(A) = m/n = 80/100 = 0{,}8$.

Задача 27. Произведено $n = 200$ выстрелов, зарегистрировано $m = 170$ попаданий. Событие A = {попадание в цель}. Найти относительную частоту события A.

§ 7.1. ВЕРОЯТНОСТЬ ОТКЛОНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ ОТ ПОСТОЯННОЙ ВЕРОЯТНОСТИ В НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЯХ

Производится серия из n независимых испытаний. В каждом из них вероятность появления события A равна p, p — это теоретическая величина. На практике же мы наблюдаем для события A относительную частоту $w(A) = m/n$. Как сильно $w(A)$ может отклониться от p?

Вероятность того, что отклонение относительной частоты от постоянной вероятности по абсолютной величине не превысит заданного числа $\varepsilon > 0$, можно найти: $P(|m/n - p| \leqslant \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)$, где $\Phi(x)$ — это функция Лапласа (см. § 5.4).

Пример 45. Произведено $n = 1000$ независимых испытаний. В каждом из них вероятность появления события A равна $p = 0{,}3$. Найдем вероятность того, что отклонение относительной частоты от постоянной вероятности по абсолютной величине не превысит заданного числа $\varepsilon = 0{,}01$.

$q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

$$P(|m/n - p| < \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{1000}{0{,}3\times 0{,}7}}\right) \approx 0{,}5098.$$

Задача 28. Произведено $n = 500$ независимых испытаний. В каждом из них вероятность появления события A равна $p = 0{,}4$. Найти вероятность того, что отклонение относительной частоты от постоянной вероятности по абсолютной величине не превысит заданного числа $\varepsilon = 0{,}03$.

Глава 8

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайная величина — это величина, которая в результате каждого опыта принимает одно заранее неизвестное значение, зависящее от случайных причин. Будем обозначать случайные величины латинскими буквами X, Y, Z,...

Среди случайных величин выделяют дискретные и непрерывные. *Дискретная случайная величина* — это случайная величина, которая может принимать не более чем счетное (то есть либо конечное, либо счетное (можно занумеровать)) множество значений. Примеры дискретных случайных величин:

- число попаданий в мишень при n выстрелах (возможные значения от 0 до n);
- число выпавших гербов при n бросаниях монеты (возможные значения от 0 до n);
- число выпавших единиц при n бросаниях кубика (возможные значения от 0 до n);
- число прибывших самолетов в аэропорт (счетное множество значений);
- число поступивших вызовов на АТС (счетное множество значений).

Задача 29. Привести пример дискретной случайной величины.

§ 8.1. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Дискретная случайная величина принимает значения с различными вероятностями. Соответствие между значениями и их вероятностями называют *законом распределения вероятностей дискретной случайной величины.*

Значения	x_1	x_2	...	x_n
Вероятности	p_1	p_2	...	p_n

$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$

Пример 46. Случайная величина X — это число выпавших очков при бросании кубика. Возможные значения 1, 2, 3, 4, 5, 6. Их вероятности равны 1/6. Закон распределения вероятностей данной случайной величины X для правильного кубика:

Значения	1	2	3	4	5	6
Вероятности	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Задача 30. Случайная величина Y — это число выпавших гербов при бросании монеты. Найти закон распределения вероятностей случайной величины Y.

§ 8.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ, ЕГО СВОЙСТВА

Математическое ожидание дискретной случайной величины X равно $M(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$. В англоязычной литературе вместо $M(X)$ используют обозначение $E(X)$.

Свойства математического ожидания $M(X)$:

1. $M(X)$ заключено между наименьшим и наибольшим значениями случайной величины X.
2. Если $X = C = \text{const}$ (постоянная), то $M(C) = C$.
3. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX) = C \times M(X)$.
4. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.
5. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий $M(XY) = M(X)M(Y)$.

Пример 47. Найдем математическое ожидание дискретной случайной величины X из примера 46.

$M(X) = 1\times1/6 + 2\times1/6 + 3\times1/6 + 4\times1/6 + 5\times1/6 + 6\times1/6 = 3{,}5.$

Мы видим, что $M(X)$ заключено между наименьшим (1) и наибольшим (6) значениями случайной величины X.

Задача 31. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины из задачи 30.

§ 8.3. ДИСПЕРСИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ, ЕЕ СВОЙСТВА

Дисперсия дискретной случайной величины X равна:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - M(X))^2,$$

где $M(X)$ — это математическое ожидание случайной величины X.

$D(X)$ — это математическое ожидание квадрата отклонения $X - M(X)$. В англоязычной литературе вместо $D(X)$ используют обозначения $V(X)$, $Var(X)$. Очень часто $D(X)$ вычисляют по формуле $D(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (M(X))^2$.

Свойства дисперсии $D(X)$:

1. Всегда $D(X) \geqslant 0$.
2. Если $X = C = \text{const}$ (постоянная), то $D(C) = 0$.
3. $D(CX) = C^2D(X)$, где $C = \text{const}$.
4. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.
5. Дисперсия разности независимых случайных величин равна сумме их дисперсий $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.

Пример 48. Найдем дисперсию дискретной случайной величины X из примера 46. Заполним таблицу.

x_i	p_i	$p_i x_i$	x_i^2	$p_i x_i^2$
1	1/6	1/6	1	1/6
2	1/6	2/6	4	4/6
3	1/6	3/6	9	9/6
4	1/6	4/6	16	16/6
5	1/6	5/6	25	25/6
6	1/6	6/6	36	36/6
Сумма	1	3,5	91	91/6

3-й столбец — это произведения соответствующих элементов 1-го и 2-го столбцов. 4-й столбец — это квадраты соответствующих элементов 1-го столбца. 5-й столбец — это произведения соответствующих элементов 2-го и 4-го столбцов. В последней строке находится сумма элементов соответствующего столбца.

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (M(X))^2 = 91/6 - 3{,}5^2 = 35/12.$$

Задача 32. Найти дисперсию дискретной случайной величины из задачи 30.

§ 8.4. БИНОМИАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Схема Бернулли была рассмотрена в § 5.1. Случайная величина X — это число появлений события A в n испытаниях. Закон распределения вероятностей случайной величины X:

Значения	x_1	x_2	...	x_n
Вероятности	$p_n(0)$	$p_n(1)$	...	$p_n(n)$

Такое распределение вероятностей называется *биномиальным*. Математическое ожидание $M(X) = np$. Дисперсия $D(X) = npq$.

Пример 49. Найдем закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию для биномиального распределения при $n = 2$, $p = 0{,}3$.

$q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$, $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. $p_2(0) = C_2^0 0{,}3^0 0{,}7^{2-0} = 0{,}49$, $p_2(1) = C_2^1 0{,}3^1 0{,}7^{2-1} = 0{,}42$, $p_2(2) = C_2^2 0{,}3^2 0{,}7^{2-2} = 0{,}09$.

Значения	x_1	x_2	x_3
Вероятности	0,49	0,42	0,09

Математическое ожидание $M(X) = np = 2\times0{,}3 = 0{,}6$. Дисперсия $D(X) = npq = 2\times0{,}3\times0{,}7 = 0{,}42$.

Задача 33. Найти закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию для биномиального распределения при $n = 3$, $p = 0{,}4$.

Биномиальное распределение применяется при изучении парапсихологических явлений (например, телепатии). Если число правильно воспроизведенных перцепиентом символов в серии испытаний окажется существенно больше, чем предсказывается биномиальным распределением, то это не случайно: имеется некоторая зависимость принимаемого перцепиентом и передаваемого индуктором. К сожалению, пока значимых отличий от условий независимости никто не получил.

§ 8.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Если дискретная случайная величина X может принимать только целые неотрицательные значения с вероятностями $P(X = k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$,

то говорят, что она распределена по *закону Пуассона* с параметром λ. Для такой случайной величины математическое ожидание и дисперсия равны между собой и равны параметру λ.

Примеры случайных величин, имеющих распределение Пуассона: число автомашин, которые будут обслужены завтра автозаправочной станцией; число бракованных изделий в готовой продукции.

Пример 50. Случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = 2$. Тогда $M(X) = D(X) = 2$.

Задача 34. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, которая может принимать только целые неотрицательные значения с вероятностями $P(X = k) = 3^k e^{-3}/k!$.

Распределение Пуассона характеризует возможность появления редких событий. Наблюдать редкие события трудно, долго и дорого. Хотя такие события могут быть важны во всех сферах науки и жизни.

Глава 9

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Непрерывная случайная величина — это случайная величина, значения которой целиком заполняют некоторый интервал.

Примеры непрерывных случайных величин: время безотказной работы прибора, длина сделанной детали, процентная ставка дохода по инвестициям, отклонение точки падения снаряда от цели.

Задача 35. Привести примеры непрерывных случайных величин.

§ 9.1. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА

Так как невозможно перебрать все значения непрерывной случайной величины, то ее задают с помощью функции распределения. *Функцией распределения* (*интегральным законом распределения*) случайной величины X называется функция $F(x) = P(X < x)$, где $P(X < x)$ — вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x.

Свойства функции распределения:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.
2. Вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала $(\alpha; \beta)$, равна разности значений функции распределения на концах этого интервала: $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.
3. $F(x)$ — неубывающая функция.
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

§ 9.2. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ЕЕ СВОЙСТВА

Функция $f(x) = F'(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей* (*дифференциальной функцией*). График функции $f(x)$ называется *кривой распределения*.

Свойства функции $f(x)$:

1. $0 \leqslant f(x)$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = F(x)$.

3. Вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала $(\alpha; \beta)$, — это $P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. Геометрически это означает, что вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\alpha; \beta)$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной функцией $f(x)$, осью Ox и прямыми $x = \alpha$ и $x = \beta$.

4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Пример 51. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0, \\ 1/9x^2, 0 < x \leqslant 3, \\ 1, x > 3. \end{cases}$

Найдем плотность распределения вероятностей. Так как $F(x)$ задается разными формулами, то вычисляем производную на каждом интервале: $f(x) = F'(x)$. $0' = 0$, $1' = 0$, $(1/9x^2)' = 1/9(x^2)' = 1/9 \times 2x = 2/9x$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0, \\ 2/9x, 0 < x \leqslant 3, \\ 0, x > 3. \end{cases}$$

Задача 36. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0, \\ 1/16x^2, 0 < x \leqslant 4, \\ 1, x > 4. \end{cases}$

Найти плотность распределения вероятностей.

§ 9.3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X вычисляется по формуле $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ и обладает теми же свойствами, что и математическое ожидание дискретной случайной величины (см. § 8.2).

Пример 52. Найдем математическое ожидание непрерывной случайной величины X из примера 51.

$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$. Так как $f(x)$ задается разными формулами на трех разных интервалах, то разобьем интеграл на сумму трех интегралов.

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int\limits_{0}^{3} xf(x)dx + \int\limits_{3}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} x\times 0dx + \int\limits_{0}^{3} x\times(2/9)xdx$$

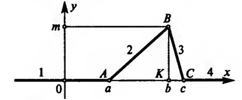
$$+ \int\limits_{3}^{+\infty} x\times 0dx = 0 + 2/9\int\limits_{0}^{3} x^2dx + 0 = 2/9\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 2/9\times 3^3/3 - 2/9\times 0^3/3 = 2.$$

Задача 37. Найти математическое ожидание непрерывной случайной величины X из задачи 36.

§ 9.4. ДИСПЕРСИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Дисперсия непрерывной случайной величины X вычисляется по формуле $D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2$ и обладает теми же свойствами, что и дисперсия дискретной случайной величины (см. § 8.3).

Пример 53. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид, показанный на графике. $a = 3$, $b = 7$, $c = 8$.



Найдем неизвестное число m, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (свойство функции $f(x)$).

Тогда $1 = \int\limits_{-\infty}^{3} f(x)dx + \int\limits_{3}^{8} f(x)dx + \int\limits_{8}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{3} 0dx + \int\limits_{3}^{8} f(x)dx + \int\limits_{8}^{+\infty} 0dx =$

$= \int_3^8 f(x)dx = S_{\Delta ABC}$ (геометрический смысл определенного интеграла) $=$
$= 1/2 \times AC \times BK = 1/2(8-3)m = 5/2m$. Отсюда $m = 2/5$.

На участке 1 ($x \leq 3$) и на участке 4 ($x > 8$) $f(x) = 0$.

На участке 2 ($3 < x \leq 7$) график $f(x)$ — это отрезок прямой AB.

Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет вид $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. $A(3; 0)$, $B(7; 2/5)$. Тогда $\dfrac{x-3}{7-3} = \dfrac{y-0}{2/5-0}$, $2/5(x-3) = 4y$, $y = 0{,}1x - 0{,}3$.

На участке 3 ($7 < x \leq 8$) график $f(x)$ — это отрезок прямой BC. $C(8; 0)$, $B(7; 2/5)$. Тогда $\dfrac{x-8}{7-8} = \dfrac{y-0}{2/5-0}$, $2/5(x-8) = -y$, $y = 3{,}2 - 0{,}4x$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3, \\ 0{,}1x - 0{,}3, & 3 < x \leq 7, \\ 3{,}2 - 0{,}4x, & 7 < x \leq 8, \\ 0, & x > 8. \end{cases}$$

Найдем функцию распределения $F(x)$.

Известно, что $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F(x)$ (свойство функции $f(x)$). Мы воспользуемся геометрическим смыслом определенного интеграла.

Если $x \leq 3$, то $f(x) = 0$ и площадь под кривой равна нулю.

Если $x > 8$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_3^8 f(t)dt = 1$.

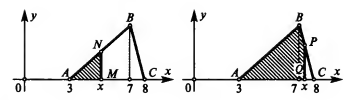
Если $3 < x \leq 7$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_3^x f(t)dt = S_{\Delta AMN}$. Координаты точек $M(x; 0)$ и $N(x; f(x)) = (x; 0{,}1x - 0{,}3)$.

Тогда $S_{\Delta AMN} = 1/2 \times AM \times MN = 1/2(x-3)(0{,}1x - 0{,}3 - 0) = 0{,}05(x-3)^2$.

Если $7 < x \leq 8$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_3^x f(t)dt = S_{ABPQ} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta CPQ} = 1 - S_{\Delta CPQ}$. Координаты точек $Q(x; 0)$ и $P(x; f(x)) = (x; 3{,}2 - 0{,}4x)$.

Тогда $1 - S_{\Delta CPQ} = 1 - 1/2 \times CQ \times QP = 1 - 1/2(8-x) \times (3{,}2 - 0{,}4x - 0) = 1 - 0{,}2(x-8)^2$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3, \\ 0{,}05(x-3)^2, & 3 < x \leq 7, \\ 1 - 0{,}2(x-8)^2, & 7 < x \leq 8, \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$



Математическое ожидание $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{3} xf(x)dx + \int\limits_{3}^{7} xf(x)dx + \int\limits_{7}^{8} xf(x)dx + \int\limits_{8}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{3} x \times 0dx + $$

$$+ \int\limits_{3}^{7} x \times (0{,}1x - 0{,}3)dx + \int\limits_{7}^{8} x \times (3{,}2 - 0{,}4x)dx + \int\limits_{8}^{+\infty} x \times 0dx = 6.$$

Мы использовали формулу Ньютона-Лейбница, табличный интеграл $\int x^p dx = x^{p+1}/(p+1)$ $(p \neq -1)$ и то, что постоянную можно выносить за знак интеграла.

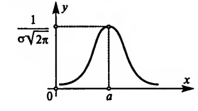
Дисперсия $D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2 = \int\limits_{3}^{7} x^2 \times (0{,}1x - 0{,}3)dx +$

$$+ \int\limits_{7}^{8} x^2 \times (3{,}2x - 0{,}4)dx - 6^2 \approx 1{,}17.$$

Задача 38. Ответить на вопросы примера 53 при $a = 4$, $b = 6$, $c = 9$.

§ 9.5. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Случайная величина X подчиняется *нормальному закону распределения вероятностей*, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где $a = \text{const}$, $\sigma = \text{const} > 0$.



Обозначение: $X = N(a, \sigma)$. Схематически функция $f(x)$ имеет вид, показанный на рисунке.

Математическое ожидание $M(X) = a$, дисперсия $D(X) = \sigma^2$, стандартное отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sigma$.

Пример 54. Плотность распределения вероятностей нормально распределенной случайной величины X имеет вид $f(x) = \gamma e^{-3x^2+7x+6}$. Найдем неизвестное число γ, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$.

Выделим в выражении $-3x^2 + 7x + 6$ полный квадрат: $-3x^2 + 7x + 6 = -3(x - 7/6)^2 + 121/12$.

Тогда $f(x) = \gamma e^{-3(x-7/6)^2+121/12} = \gamma e^{121/12} e^{-\frac{(x-7/6)^2}{1/3}} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

(так как случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения вероятностей). Отсюда $a = 7/6 = M(X)$, $1/3 = 2\sigma^2$, то есть $\sigma^2 = 1/6 = D(X)$.

$$\gamma e^{121/12} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}},\ \gamma = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-121/12} = \frac{1}{\sqrt{1/6}\sqrt{2\pi}} e^{-121/12}.$$

Задача 39. Плотность распределения вероятностей нормально распределенной случайной величины X имеет вид $f(x) = \gamma e^{-4x^2+9x+7}$. Найти неизвестное число γ, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$.

Замечание. Мастер функций f_x пакета Excel содержит среди статистических функций функции $f(x)$ и $F(x)$ нормально распределенной случайной величины X с параметрами a и σ.

$f(x)$ = НОРМРАСП (x; a; σ; 0) и $F(x)$ = НОРМРАСП (x; a; σ; 1).

§ 9.6. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОПАДАНИЯ НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ В ЗАДАННЫЙ ИНТЕРВАЛ

Как известно, $P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. Но для нормально распределенной случайной величины X с параметрами a и σ справедлива следующая формула: $P(\alpha < X < \beta) = \Phi((\beta - a)/\sigma) - \Phi((\alpha - a)/\sigma)$, где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — это *функция Лапласа*. Значения функции $\Phi(x)$ берутся из специальной таблицы. Важно, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Можно также воспользоваться мастером функций f_x пакета Excel: $\Phi(x)$ = НОРМРАСП(x; 0; 1; 1) – 0,5. Полагают $\Phi(x) = 0{,}5$ при $x > 5$.

Также для $X = N(a, \sigma)$ справедлива формула $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma)$. При $\delta = 3\sigma$ получим $P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3\sigma/\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973$.

Правило трех сигм. Практически достоверно, что случайная величина $X = N(a, \sigma)$ примет свои значения в интервале $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$.

Пример 55. В примере 54 найдем вероятности выполнения неравенств $2 < X < 3$ и $|X - M(X)| < 0{,}3$.

$M(X) = a = 7/6$, стандартное отклонение $\sigma = 1/\sqrt{6}$.

Тогда $P(2 < X < 3) = \Phi((\beta - a)/\sigma) - \Phi((\alpha - a)/\sigma) = \Phi\left(\frac{3 - 7/6}{1/\sqrt{6}}\right) -$

$- \Phi\left(\frac{2 - 7/6}{1/\sqrt{6}}\right) \approx 0{,}0206$. $P(|X - 7/6| < 0{,}3) = 2\Phi\left(\frac{0{,}3}{1/\sqrt{6}}\right) \approx 0{,}5346$.

Задача 40. В задаче 39 найти вероятности выполнения неравенств $1 < X < 4$ и $|X - M(X)| < 0{,}1$.

§ 9.7. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Случайная величина X подчиняется *показательному закону распределения вероятностей*, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0, \end{cases}$ где $\lambda = \text{const} > 0$.

Тогда функция распределения $F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0. \end{cases}$

Математическое ожидание $M(X)$ = стандартное отклонение $\sigma(X) = 1/\lambda$, дисперсия $D(X) = 1/\lambda^2$.

Примеры случайных величин, имеющих показательное распределение: продолжительность обычного телефонного разговора; затраты времени на обслуживание одного покупателя; промежутки времени между появлениями автомашин на автозаправочной станции; период времени работы аппарата между поломками.

Пример 56. Случайная величина X распределена по показательному закону $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 5e^{-5x}, x \geq 0. \end{cases}$ Тогда $\lambda = 5$, математическое ожидание $M(X)$ = стандартное отклонение $\sigma(X) = 1/\lambda = 1/5 = 0{,}2$, дисперсия $D(X) = 1/\lambda^2 = 1/25 = 0{,}04$.

Задача 41. Случайная величина X распределена по показательному закону, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 2e^{-2x}, x \geq 0. \end{cases}$ Найти математическое ожидание, стандартное отклонение, дисперсию.

Замечание. Мастер функций f_x пакета Excel содержит среди статистических функций функции $f(x)$ и $F(x)$ случайной величины X, распределенной по показательному закону с параметром λ. $f(x)$ = ЭКСПРАСП (x; λ; 0) и $F(x)$ = ЭКСПРАСП (x; λ; 1).

§ 9.8. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Случайная величина X называется ***равномерно распределенной***, если ее плотность распределения вероятностей имеет следующий вид: $f(x) = \begin{cases} 0, x \leq a, \\ 1/(b-a), a < x \leq b, \\ 0, x > b, \end{cases}$ где a = const, b = const. Тогда функция распределения $F(x) = \begin{cases} 0, x \leq a, \\ (x-a)/(b-a), a < x \leq b, \\ 1, x > b. \end{cases}$

Математическое ожидание $M(X) = (a + b)/2$, дисперсия $D(X) = (b - a)^2/12$.

Пример 57. Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 2, \\ 1/5, 2 < x \leq 7, \\ 0, x > 7. \end{cases}$

Тогда математическое ожидание $M(X) = (a + b)/2 = (2 + 7)/2 = 4{,}5$, дисперсия $D(X) = (b - a)^2/12 = (7 - 2)^2/12 = 25/12$.

Задача 42. Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 3, \\ 1/6, 3 < x \leq 9, \\ 0, x > 9. \end{cases}$

Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Глава 10

ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ. ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

§ 10.1. ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

В теории вероятностей мы имели дело с уже заданным распределением случайных величин. И на основании этого определялись интересующие нас характеристики случайных величин. На практике же мы не знаем, как распределена случайная величина. В этом случае на помощь приходит *математическая статистика*, которая изучает методы сбора, обработки и анализа данных, получаемых в результате наблюдений многократных случайных явлений.

К числу задач, решаемых методами математической статистики, относятся:

а) изучение большой совокупности объектов по небольшому их количеству, извлеченному из совокупности случайным образом (*выборочный метод*);

б) выяснение характера распределения, нахождение приближенных значений параметров распределения;

в) определение формы и силы связи между случайными величинами.

§ 10.2. ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

Генеральная совокупность — это общая группа предметов, подлежащих статистическому исследованию. Она может быть большой, поэтому физически невозможно исследовать всю генеральную совокупность. К тому же затраты на сбор данных во всей генеральной совокупности очень высоки, да и риск ошибки многократно возраста-

ет. Кроме того, наблюдение может быть также связано с уничтожением исследуемого образца (например, проверка качества консервов).

Принимая во внимание все вышеперечисленные причины, из генеральной совокупности случайным образом отбирают небольшое количество предметов — *выборку*, после изучения которой и делаются выводы о генеральной совокупности.

Выборка должна быть сформирована *случайным образом* (например, по таблице случайных чисел). Таблица случайных чисел представляет собой последовательность цифр в виде таблицы, в которой каждая из цифр от 0 до 9 встречается независимо друг от друга с вероятностью 0,1.

Также выборка должна быть *репрезентативной*, то есть давать правильное представление о генеральной совокупности. Примером выборки является любой социологический опрос.

Замечание. Excel позволяет провести случайную выборку. Нужно воспользоваться надстройкой *Пакет анализа. Сервис* → *Анализ данных* → *Выборка* → *ОК.* Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Входной интервал* указывается ссылка на ячейки, содержащие номера элементов генеральной совокупности. Флажок *Метки* устанавливается в активное состояние, если 1-я строка (1-й столбец) во входном интервале содержит заголовки. В поле *Метод выборки* активизировать способ отбора *случайный.* После этого в графе *Число выборок* указать объем выборки. Также нужно указать *Параметры вывода. ОК.* Появляется итоговое окно.

Глава 11

ВАРИАЦИОННЫЕ РЯДЫ

В генеральной совокупности исследуется некоторый количественный признак. Из нее случайным образом извлекается выборка объема n, то есть число элементов выборки равно n. Каждое наблюдаемое в выборке значение x_i, $i = 1, ..., k$, называется *вариантой*.

Частота n_i — это число наблюдений значения x_i в выборке. *Относительная частота* w_i — это отношение частоты n_i к объему выборки: $w_i = n_i/n$.

Таблица следующего вида называется *вариационным рядом* (варианты x_i расположены в порядке возрастания):

x_1	x_2	...	x_k
n_1	n_2	...	n_k

Это так называемый *дискретный вариационный ряд.*

Для наглядности строят различные графики статистического распределения. *Эмпирическая функция распределения* $F_э(x) = n_x/n$, где n_x — число вариант, меньших x. Соединив соседние точки $(x_i, F_э(x_i))$ отрезками прямых, мы получим *кумуляту*.

В том случае, когда значения изучаемого признака сколь угодно мало отличаются друг от друга, строят *интервальные вариационные ряды.*

Интервал	$x_0–x_1$	$x_1–x_2$	...	$x_{k-1}–x_k$
Частота	n_1	n_2	...	n_k

Здесь частота — это число вариант, попавших в соответствующий интервал. При построении кумуляты и полигона (определение см. ниже) в качестве 1-й координаты берется середина соответствующего интервала. Если все интервалы имеют одинаковую длину, то это *равновеликие интервалы.* Иначе *неравновеликие интервалы.* Часто первый и последний интервалы не имеют соответственно нижней и верхней границ. Тогда считают длину 1-го интервала равной длине 2-го интервала, а длину последнего интервала — равной длине предпоследнего.

Интервальные вариационные ряды графически можно представить с помощью *гистограммы*. Это ступенчатая фигура, образованная прямоугольниками, основаниями которых служат интервалы (x_{i-1}, x_i), а высоты равны w_i/Δ_i, где $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$. Площадь i-го прямоугольника равна w_i, а всей гистограммы — 1. Соединив середины верхних сторон прямоугольников, получим *полигон*.

Пример 58. Получены данные о почасовой оплате труда работников одного предприятия.

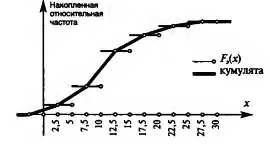
Зарплата, руб./час	До 5	5–10	10–15	15–20	20–25	Св. 25
Число работников	10	22	35	17	11	5

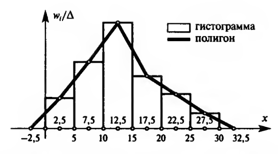
Построим эмпирическую функцию распределения, кумуляту, гистограмму, полигон.

Длину открытых интервалов (первого и последнего) считаем равными соответственно длине 2-го и предпоследнего интервалов. Длина интервалов $\Delta = 5$.

Интервал	Середина интервала	Частота n_i	$w_i = n_i/n$	w_i/Δ	Накопленная относительная частота
0–5	2,5	10	0,1	0,02	0,1
5–10	7,5	22	0,22	0,044	0,32
10–15	12,5	35	0,35	0,07	0,67
15–20	17,5	17	0,17	0,034	0,84
20–25	22,5	11	0,11	0,022	0,95
25–30	27,5	5	0,05	0,01	1
Сумма	—	100	—	—	—

Во 2-м столбце указаны середины интервалов. В последней строке указаны суммы чисел соответствующего столбца. Каждое число 3-го столбца делим на сумму чисел 3-го столбца и результат пишем





в 4-й столбец. Каждое число 6-го столбца равно сумме числа из этой же строки 4-го столбца и предыдущего числа 6-го столбца.

Задача 43. Получены данные о почасовой оплате труда работников одного предприятия.

Зарплата, руб./час	До 5	5–10	10–15	15–20	20–25	Св. 25
Число работников	11	21	34	18	8	8

Построить эмпирическую функцию распределения, кумуляту, гистограмму, полигон.

Замечание. Excel позволяет быстро построить гистограмму, воспользовавшись мастером диаграмм (*Вставка* → *Диаграмма* или на панели инструментов *Стандартная* щелкнуть по кнопке *Мастер диаграмм*). Можно также воспользоваться надстройкой *Пакет анализа. Сервис* → *Анализ данных* → *Гистограмма* → *OK*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Интервал карманов* вводится ссылка на ячейки, содержащие граничные значения интервалов. Поставив «галочку» рядом со словами *Вывод графика*, мы получим кумуляту. *OK*.

Глава 12

РАСЧЕТ СВОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЫБОРКИ

Мы исследуем параметр теоретического распределения генеральной совокупности. По результатам выборки получается точечная оценка этого параметра. Так как результаты выборки случайны, то полученная оценка есть величина случайная.

Оценку называют *несмещенной*, если математическое ожидание полученной оценки равно теоретическому значению параметра генеральной совокупности при любом объеме выборки. Иначе оценку называют *смещенной*. Несмещенная оценка не является слишком завышенной или слишком заниженной по сравнению с соответствующим параметром генеральной совокупности. Это свойство представляется желательным для оценки.

Пусть наблюдаются варианты $x_1, ..., x_k$ с частотами $n_1, ..., n_k$ соответственно. Тогда *выборочная средняя* $\overline{x}_в = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i / n$ есть несмещенная оценка генеральной средней $\overline{x}_г$ (математическое ожидание исследуемого признака), так как $M(\overline{x}_в) = \overline{x}_г$.

Конечно, для любого конкретного набора данных выборочная средняя $\overline{x}_в$ будет больше или меньше генеральной средней $\overline{x}_г$. Но при многократном извлечении выборки $\overline{x}_в$ будут в среднем близки к генеральной средней $\overline{x}_г$, то есть не будут систематически слишком высокими или слишком низкими.

Выборочная дисперсия $D_в = \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_в)^2 / n = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 / n - (\overline{x}_в)^2$ является смещенной оценкой генеральной дисперсии $D_г$, так как $M(D_в) = (n-1) D_г / n$. Поэтому вводят поправочный коэффициент и находят *исправленную выборочную дисперсию* $s^2 = nD_в/(n-1)$.

При нахождении оценок используется *метод произведений*. Для простоты вычислений лучше перейти к условным вариантам.

В случае *равноотстоящих вариант* (разность между любыми соседними вариантами постоянна и равна Δ) переходят к условным ва-

риантам $u_i = (x_i - c)/\Delta$, где c — *ложный нуль* (варианта, расположенная в середине вариационного ряда; если же таких две, то выбираем из этих двух варианту с наибольшей частотой).

В случае неравноотстоящих вариант разбиваем весь вариационный ряд на 8–10 равновеликих интервалов длины Δ, берем середины интервалов и получаем случай равноотстоящих вариант.

Условный эмпирический момент порядка p — это величина $M_p = \sum_{i=1}^{k} n_i u_i^p / n$. Тогда $\overline{x}_в = M_1\Delta + c$, $D_в = (M_2 - M_1^2)\Delta^2$.

Если мы вместо интервала рассматривали его середину, то возникает систематическая ошибка при расчете выборочной дисперсии. Чтобы уменьшить эту ошибку, вводят поправку Шеппарда и находят уточненное значение выборочной дисперсии: $D_в^* = D_в - \Delta^2/12$.

Пример 59. Найдем сводные характеристики выборки в примере 58.

Заполним таблицу.

Интервал	Середина интервала x_i	Частота n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2 = n_i u_i \times u_i$
0–5	2,5	10	−2	−20	40
5–10	7,5	22	−1	−22	22
10–15	12,5	35	0	0	0
15–20	17,5	17	1	17	17
20–25	22,5	11	2	22	44
25–30	27,5	5	3	15	45
Сумма	—	100	—	12	168

Разность между любыми соседними вариантами x_i постоянна и равна $\Delta = 5$. В середине вариационного ряда расположены 12,5 и 17,5. Ложный нуль $c = 12{,}5$ (так как частота $35 > 17$).

$M_1 = \sum_{i=1}^{k} n_i u_i / n = 12/100 = 0{,}12$. Выборочная средняя $\overline{x}_в = M_1\Delta + c =$ $= 0{,}12 \times 5 + 12{,}5 = 13{,}1$. $M_2 = \sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2 / n = 168/100 = 1{,}68$.

Выборочная дисперсия $D_в = (M_2 - M_1^2)\Delta^2 = (1{,}68 - 0{,}12^2) \times 5^2 =$ $= 41{,}64$. Уточненное значение выборочной дисперсии $D_в^* = D_в - \Delta^2/12 =$ $= 41{,}64 - 5^2/12 \approx 39{,}56$.

Задача 44. Найти сводные характеристики выборки в задаче 43.

Замечание. Статистические функции мастера функций f_x пакета Excel позволяют быстро найти сводные характеристики выборки.

Функция СРЗНАЧ рассчитывает $\overline{x}_в$. Функция СТАНДОТКЛОН оценивает генеральное стандартное отклонение $\sqrt{D_г}$ по выборке. Функции ДИСП и ДИСПР позволяют вычислить s^2 и $D_в$ соответственно. С помощью функции СТАНДОТКЛОНП можно найти выборочное стандартное отклонение $\sigma_в = \sqrt{D_в}$. Надстройка *Пакет анализа* позволяет получить сразу все сводные характеристики выборки. *Сервис → Анализ данных → Описательная статистика → ОК.* Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. Надо указать, как сгруппированы данные, и поставить «галочку» рядом со словами *Итоговая статистика. ОК.* Появляется итоговое окно.

Среднее	$\overline{x}_в$
Стандартная ошибка	
Медиана	Варианта в середине вариационного ряда
Мода	Варианта с наибольшей частотой
Стандартное отклонение	$\sigma_в$
Дисперсия выборки	$D_в$
Эксцесс	
Асимметрия	
Интервал	$x_{max} - x_{min}$
Минимум	x_{min}
Максимум	x_{max}
Счет	n
Наибольший	
Наименьший	
Уровень надежности	

Глава 13

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

Изучаемая генеральная совокупность может быть очень большой. Поэтому с целью экономии времени и материальных ресурсов случайным образом производят выборку из генеральной совокупности. Для этой выборки вычисляют выборочную среднюю $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$, выборочную дисперсию $s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2/n$ и интересующие нас параметры. Как оценить параметры генеральной совокупности, зная эти параметры для выборки?

Для генеральной совокупности строится *доверительный интервал* — интервал значений, в пределах которого, как мы можем надеяться, находится параметр генеральной совокупности. Наша надежда выражается *доверительной вероятностью* — вероятностью, с которой доверительный интервал «захватит» истинное значение параметра генеральной совокупности. Чем выше доверительная вероятность, тем шире доверительный интервал. Значение доверительной вероятности выбирает сам исследователь. Обычно это 0,9; 0,95; 0,99.

Таким образом, определить доверительный интервал — это лучшее, что можно сделать в условиях неопределенности: это точное вероятностное утверждение вместо неясных замечаний типа «Мы не уверены, но ...» или «Это значение, вероятно, близко к ...».

§ 13.1. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ ДЛЯ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СРЕДНЕЙ a (генеральная дисперсия σ^2 известна)

Если генеральная совокупность подчиняется нормальному закону распределения с известной дисперсией σ^2, то

$$\overline{X} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} < a < \overline{X} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n},$$

где $\overline{X}$ — выборочная средняя, n — объем выборки, $\alpha = 1 - p$, p — доверительная вероятность, $z_{\alpha/2}$ берем из таблицы.

α	0,4	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
z_α	0,253	0,675	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090

Для вычисления z_α можно также воспользоваться статистической функцией НОРМСТОБР($1 - \alpha$) мастера функций f_x пакета Excel.

Пример 60. Автомат, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 5$ г, фасует чай в пачки. Проведена случайная выборка объемом $n = 30$ пачек. Средний вес пачки чая в выборке $\overline{X} = 101$ г. Найдем доверительный интервал для среднего веса пачки чая в генеральной совокупности с доверительной вероятностью $p = 95\%$.

$p = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

$\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} = 101 \pm 1{,}96 \times 5/\sqrt{30} \approx 101 \pm 1{,}79$, то есть искомый интервал (99,21; 102,79).

Задача 45. Автомат, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 3$ г, фасует чай в пачки. Проведена случайная выборка объемом $n = 40$ пачек. Средний вес пачки чая в выборке $\overline{X} = 79$ г. Найти доверительный интервал для среднего веса пачки чая в генеральной совокупности с доверительной вероятностью $p = 99\%$.

Замечание. Вместо вычислений по формуле $z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$ можно было бы воспользоваться функцией ДОВЕРИТ(α; σ; n) мастера функций f_x пакета Excel.

Определим объем выборки, необходимый для оценки генеральной средней.

Пример 61. Вернемся к примеру 60. Мы получили доверительный интервал $\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \approx 101 \pm 1{,}79$. Предположим, что нам нужна ширина доверительного интервала ±1 грамм. Каким должен быть тогда объем выборки?

$z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leqslant 1 \Rightarrow \sqrt{n} \geqslant z_{\alpha/2}\sigma \Rightarrow n \geqslant (z_{\alpha/2}\sigma)^2 = (1{,}96 \times 5)^2 = 96{,}04$, то есть минимальный объем выборки равен 97. Так как объем первоначальной выборки равен 30, то объем новой выборки равен $97 - 30 = 67$ пачек.

Находим среднюю $\overline{X}$ для объединенной выборки в 97 пачек (находим именно среднюю для выборки в 97 единиц, а не среднее арифметическое средних для выборок объемов 30 и 67 пачек) и получаем доверительный интервал для средней в генеральной совокупности $\overline{X} \pm 1$.

Задача 46. Каким должен быть объем выборки в задаче 45, если требуемая ширина доверительного интервала 0,5 г?

§ 13.2. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ ДЛЯ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СРЕДНЕЙ a (генеральная дисперсия σ^2 неизвестна)

Если генеральная совокупность подчиняется нормальному закону распределения с неизвестной дисперсией σ^2, то

$$\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n-1} < a < \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n-1},$$

где $\overline{X}$ — выборочная средняя, n — объем выборки, $\alpha = 1 - p$, p — доверительная вероятность, s — выборочное стандартное отклонение.

Значение $t_{\alpha/2,n-1}$ берем из таблицы t-распределения (распределения Стьюдента). Для вычисления $t_{\alpha/2,n-1}$ можно также воспользоваться статистической функцией СТЬЮДРАСПОБР(α; $n - 1$) мастера функций f_x пакета Excel.

Пример 62. Автомат фасует чай в пачки. Проведена случайная выборка объемом $n = 30$ пачек. Средний вес пачки чая в выборке $\overline{X} = 101$ г, выборочное стандартное отклонение $s = 4$ г. Определим доверительный интервал для среднего веса пачки чая в генеральной совокупности с доверительной вероятностью $p = 95\%$.

$p = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025$.

$n = 30 \Rightarrow n - 1 = 29 \Rightarrow t_{\alpha/2,n-1} = t_{0,025;\,29} \approx 2{,}045$.

$\overline{X} \pm t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n-1} \approx 101 \pm 2{,}045 \times 4/\sqrt{29} \approx 101 \pm 1{,}52$, то есть искомый интервал (99,48; 102,52).

Задача 47. Автомат фасует чай в пачки. Проведена случайная выборка объемом $n = 40$ пачек. Средний вес пачки чая в выборке $\overline{X} = 79$ г, выборочное стандартное отклонение $s = 3$ г. Определить доверительный интервал для среднего веса пачки чая в генеральной совокупности с доверительной вероятностью $p = 99\%$.

Определим объем выборки, необходимый для оценки генеральной средней.

Пример 63. Вернемся к примеру 62. Мы получили доверительный интервал $\overline{X} \pm t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n-1} \approx 101 \pm 1{,}52$. Предположим, что нам нужна ширина доверительного интервала ± 1 г. Каким должен быть тогда объем выборки?

$t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n-1} \leqslant 1 \Rightarrow \sqrt{n-1} \geqslant t_{\alpha/2,n-1}s \Rightarrow n - 1 \geqslant (t_{\alpha/2,n-1}s)^2 \Rightarrow n \geqslant 1 + (t_{\alpha/2,n-1}s)^2 \approx 1 + (2{,}045 \times 4)^2 \approx 67{,}9$, то есть минимальный объем выборки равен 68.

Но плохо то, что $t_{\alpha/2,n-1}$ зависит от n. Тем не менее, полученный результат можно использовать. На самом деле n будет меньше.

Если полученное значение $n \geqslant 30$, то можно вместо $t_{\alpha/2,n-1}$ рассмотреть $z_{\alpha/2}$ и воспользоваться формулой $z_{\alpha/2}s/\sqrt{n-1} \leqslant 1 \Rightarrow n \geqslant 1 + (z_{\alpha/2}s)^2 \approx 1 + (1{,}96\times4)^2 \approx 62{,}47$, то есть минимальный объем выборки равен 63. Так как объем первоначальной выборки равен 30, то объем новой выборки равен $63 - 30 = 33$ пачки. Находим среднюю $\overline{X}$ для объединенной выборки в 63 пачки и получаем доверительный интервал для средней в генеральной совокупности $\overline{X} \pm 1$.

Задача 48. Каким должен быть объем выборки в задаче 47, если требуемая ширина доверительного интервала $\pm 0{,}5$ г?

§ 13.3. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ ДЛЯ ГЕНЕРАЛЬНОЙ ДОЛИ

Очень часто нас интересует, какова *генеральная доля* — доля объектов генеральной совокупности, обладающих определенным свойством.

Производится выборка объема n. Для нее вычисляется *выборочная доля* $\hat{p}$ — доля объектов, обладающих этим свойством. Тогда при выполнении условий $n\hat{p} \geqslant 5$, $n(1-\hat{p}) \geqslant 5$ доверительный интервал для генеральной доли задается формулой $\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$.

Пример 64. Проведена выборка объема $n = 2000$ шт. 150 из них оказались бракованными. Найдем доверительный интервал доли бракованных изделий в генеральной совокупности для доверительной вероятности $p = 95\%$.

$\hat{p} = 150/2000 = 0{,}075$. $n\hat{p} = 2000\times0{,}075 = 150 > 5$.

$n(1-\hat{p}) = 2000\times(1-0{,}075) = 1850 > 5$. Оба условия выполнены.

$p = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} = 0{,}075 \pm 1{,}96\sqrt{0{,}075(1-0{,}075)/2000} \approx$
$\approx 0{,}075 \pm 0{,}012$, то есть искомый интервал (0,063; 0,087).

Задача 49. Проведена выборка объема $n = 1000$ шт. 120 из них оказались бракованными. Найти доверительный интервал доли бракованных изделий в генеральной совокупности для доверительной вероятности $p = 99\%$.

Определим объем выборки, необходимый для оценки генеральной доли.

Пример 65. Вернемся к примеру 64. Мы получили доверительный интервал $\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} \approx 0{,}075 \pm 0{,}012$. Предположим, что нам нужна ширина доверительного интервала $\pm 0{,}005$. Каким должен быть тогда объем выборки?

$z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} \leqslant 0{,}005 \Rightarrow (z_{\alpha/2})^2\hat{p}(1-\hat{p})/n \leqslant 0{,}005^2 = 0{,}000025 \Rightarrow$ $n \geqslant (z_{\alpha/2})^2\,\hat{p}(1-\hat{p})/0{,}000025 \approx 1{,}96^2 \times 0{,}075 \times (1-0{,}075)/0{,}000025 \approx 10660$, то есть минимальный объем выборки равен 10660.

Так как объем первоначальной выборки равен 2000, то объем новой выборки равен 10660 − 2000 = 8660 деталей. Находим выборочную долю бракованных изделий $\hat{p}$ для объединенной выборки в 10660 деталей и получаем доверительный интервал для доли бракованных изделий в генеральной совокупности $\hat{p} \pm 0{,}005$.

Задача 50. Каким должен быть объем выборки в задаче 49, если требуемая ширина доверительного интервала $\pm 0{,}003$?

Глава 14

ИСПЫТАНИЕ ГИПОТЕЗ

Очень часто генеральная совокупность должна подчиняться некоторым параметрам. Например, фасовочная машина должна наполнять пакеты сахаром по 1 кг. Как узнать, действительно ли генеральная совокупность подчиняется этим ограничениям? С этой целью проводят *испытание гипотез*.

Из генеральной совокупности проводят выборку объема n. Для этой выборки вычисляют нужные характеристики. Затем формулируют две гипотезы: основную H_0 и альтернативную H_1. Основная гипотеза H_0 — это то утверждение, которое подлежит проверке.

Например, гипотеза H_0: генеральная средняя $a = 2$. Альтернативная гипотеза H_1 в этом примере может быть сформулирована любым из следующих трех способов:

а) H_1: $a > 2$ (*правосторонняя проверка*);

б) H_1: $a < 2$ (*левосторонняя проверка*);

в) H_1: $a \neq 2$ (*двусторонняя проверка*).

Исследователь задает доверительную вероятность p — величину, которая отражает степень уверенности исследователя в результате испытания. Для односторонней проверки $\alpha = 1 - p$, для двусторонней проверки $\alpha = (1 - p)/2$. Величина $1 - p$ называется *уровнем значимости*.

По α, n в зависимости от вида решаемой задачи по таблицам находят одну (для односторонней проверки) или две (для двусторонней проверки) граничные точки, которые наносят на координатную ось. Порядок нахождения граничных точек показан далее.

По результатам выборки вычисляется величина, называемая *статистикой*. Формула для вычисления статистики зависит от вида решаемой задачи. Значение статистики наносят на координатную ось. В зависимости от взаимного расположения значения статистики и граничных точек возможен один из трех вариантов:

1) принимается H_0;

2) отклоняется H_0 и без всякой проверки принимается H_1;

3) доказательство является неубедительным, нужно больше данных.

Для левосторонней проверки:

Отклонение H_0 Принятие H_1 $(100-p)\%$	Принятие H_0 $p\%$

граничная точка

Для правосторонней проверки:

Принятие H_0 $p\%$	Отклонение H_0 Принятие H_1 $(100-p)\%$

граничная точка

Для двусторонней проверки:

Отклонение H_0 Принятие H_1 $[(100-p)/2]\%$	Принятие H_0 $p\%$	Отклонение H_0 Принятие H_1 $[(100-p)/2]\%$

граничная точка — граничная точка

Чем выше доверительная вероятность, тем шире область принятия H_0.

§ 14.1. ИСПЫТАНИЕ ГИПОТЕЗ НА ОСНОВЕ ВЫБОРОЧНОЙ СРЕДНЕЙ ПРИ ИЗВЕСТНОЙ ГЕНЕРАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИИ σ^2

Для выборки объема n вычисляется выборочная средняя $\overline{X}$. a — предполагаемое значение генеральной средней. Граничные точки: z_α (для правосторонней проверки), $-z_\alpha$ (для левосторонней проверки), $\pm z_\alpha$ (для двусторонней проверки). Значение z_α находим по таблице (см. § 13.1). Статистика $z = \dfrac{\overline{X} - a}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Пример 66. Автомат, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 1$ г, фасует чай в пачки со средним весом $a = 100$ г. В случайной выборке объема $n = 25$ пачек средний вес $\overline{X} = 101{,}5$ г. Надо ли отрегулировать автомат? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

H_0: для нормальной совокупности генеральная средняя $a = 100$ г.

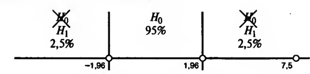
H_1: $a \neq 100$ г.

Проведем двустороннюю проверку.

$\alpha = (1 - p)/2 = (1 - 0{,}95)/2 = 0{,}025 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}96 \Rightarrow$ граничные точки $\pm 1{,}96$.

Статистика $z = \dfrac{\overline{X} - a}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{101{,}5 - 100}{1/\sqrt{25}} = 7{,}5.$

Отметим значения на числовой оси.



Отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. Автомат нужно отрегулировать.

Задача 51. Автомат, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 1{,}5$ г, фасует чай в пачки со средним весом $a = 80$ г. В случайной выборке объема $n = 16$ пачек средний вес $\overline{X} = 78{,}5$ г. Надо ли отрегулировать автомат? Доверительная вероятность $p = 99\%$.

Пример 67. Станок, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 0{,}5$ мм, производит детали средней длины $a = 20$ мм. В случайной выборке объема $n = 16$ деталей средняя длина $\overline{X} = 19{,}8$ мм. Правильно ли настроен станок? Доверительная вероятность $p = 99\%$.

H_0: для нормальной совокупности генеральная средняя $a = 20$ мм.

H_1: $a < 20$ мм.

Проведем левостороннюю проверку.

$\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \Rightarrow z_\alpha = 2{,}326 \Rightarrow$ граничная точка $-2{,}326$.

Статистика $z = \dfrac{\overline{X} - a}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{19{,}8 - 20}{0{,}5/\sqrt{16}} = -1{,}6.$

Отметим значения на числовой оси.

Принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 1%. Станок настроен правильно.

Задача 52. Станок, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 0{,}4$ мм, производит детали средней длины $a = 30$ мм. В случайной выборке объема $n = 25$ деталей средняя длина $\overline{X} = 30{,}1$ мм. Правильно ли настроен станок? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

§ 14.2. ИСПЫТАНИЕ ГИПОТЕЗ НА ОСНОВЕ ВЫБОРОЧНОЙ СРЕДНЕЙ ПРИ НЕИЗВЕСТНОЙ ГЕНЕРАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИИ

Для выборки объема n вычисляются выборочная средняя $\overline{X}$ и выборочное стандартное отклонение s. Пусть a — предполагаемое значение генеральной средней. По таблице t-распределения находим $t_{\alpha;n-1}$. В Excel для двусторонней проверки $t_{\alpha;n-1}$ = СТЬЮДРАСПОБР $(1 - p;\ n - 1)$, для односторонней проверки $t_{\alpha;n-1}$ = СТЬЮДРАСПОБР$(2(1 - p);\ n - 1)$. Граничные точки: $t_{\alpha;n-1}$ (для правосторонней проверки), $-t_{\alpha;n-1}$ (для левосторонней проверки), $\pm t_{\alpha;n-1}$ (для двусторонней проверки). Статистика $t = \dfrac{\overline{X} - a}{s/\sqrt{n-1}}$.

Пример 68. Производитель утверждает, что средний вес пачки чая не меньше $a = 100$ г. Инспектор отобрал 10 пачек чая и взвесил. Их вес оказался 97, 102, 103, 98, 96, 105, 98, 100, 101, 99 г соответственно. Не противоречит ли это утверждению производителя? Предполагается, что вес пачек чая распределен нормально. Доверительная вероятность $p = 99\%$.

H_0: для нормальной совокупности генеральная средняя $a = 100$ г.

H_1: $a < 100$ г.

Проведем левостороннюю проверку.

$\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \Rightarrow t_{\alpha;n-1} = t_{0{,}01;10-1} = 2{,}821 \Rightarrow$ граничная точка $-2{,}821$. Найдем $\overline{X}$ и s.

Номер пачки	Вес, г x_i	$x_i - \overline{X}$	$(x_i - \overline{X})^2$
1	97	–2,9	8,41
2	102	2,1	4,41
3	103	3,1	9,61
4	98	–1,9	3,61
5	96	–3,9	15,21
6	105	5,1	26,01
7	98	–1,9	3,61
8	100	0,1	0,01
9	101	1,1	1,21
10	99	–0,9	0,81
Сумма	999	0	72,9

$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n = 999/10 = 99{,}9$ г.

$s^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2/n = 72{,}9/10 = 7{,}29$ г², $s = \sqrt{7{,}29} = 2{,}7$ г.

Статистика $t = \dfrac{\overline{X} - a}{s/\sqrt{n-1}} = \dfrac{99{,}9 - 100}{2{,}7/\sqrt{10-1}} \approx -0{,}111.$

Отметим значения на числовой оси.

Принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 1%. Выборка инспектора не противоречит утверждению производителя.

Задача 53. Производитель утверждает, что средний вес плитки шоколада не меньше $a = 50$ гр. Инспектор отобрал 10 плиток шоколада и взвесил. Их вес оказался 49, 50, 51, 52, 48, 47, 49, 52, 48, 51 г соответственно. Не противоречит ли это утверждению производителя? Предполагается, что вес плитки шоколада распределен нормально. Доверительная вероятность $p = 95\%$.

§ 14.3. ИСПЫТАНИЕ ГИПОТЕЗ НА ОСНОВЕ ВЫБОРОЧНОЙ ДОЛИ

Для выборки объема n вычисляется выборочная доля $\hat{p}$ = = (число элементов выборки, обладающих нужным свойством)/(объем выборки) и сравнивается с генеральной долей $\overline{p}$. Граничные точки: z_α (для правосторонней проверки), $-z_\alpha$ (для левосторонней проверки), $\pm z_\alpha$ (для двусторонней проверки). z_α находим по таблице (см. § 13.1).

Статистика $z = \dfrac{\hat{p} - \overline{p}}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})/n}}.$

Пример 69. Производитель утверждает, что доля бракованных изделий не превосходит 3%. В случайной выборке объема $n = 100$ изделий оказалось 5 бракованных изделий. Не противоречит ли это утверждению производителя? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

H_0: доля бракованных изделий равна 3%, то есть $\overline{p} = 0{,}03$.

H_1: $\overline{p} > 0{,}03$.

Проведем правостороннюю проверку.

$\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645$. Это граничная точка. Оценка $\hat{p} = 5/100 = 0{,}05$.

Статистика $z = \dfrac{\hat{p} - \overline{p}}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})/n}} = \dfrac{0{,}05 - 0{,}03}{\sqrt{0{,}03(1-0{,}03)/100}} \approx 1{,}172.$

Отметим значения на числовой оси.

Мы принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 5%. Выборка не противоречит утверждению производителя.

Задача 54. Производитель утверждает, что доля бракованных изделий не превосходит 7%. В случайной выборке объема $n = 150$ изделий оказалось 16 бракованных изделий. Не противоречит ли это утверждению производителя? Доверительная вероятность $p = 99\%$.

§ 14.4. ИСПЫТАНИЕ ГИПОТЕЗ О ДВУХ ГЕНЕРАЛЬНЫХ ДИСПЕРСИЯХ

Очень часто про две независимые выборки объема n_1 и n_2 соответственно нужно узнать, взяты ли они из нормальных генеральных совокупностей с одинаковой дисперсией. Для каждой выборки находим выборочную дисперсию s_1^2 и s_2^2 соответственно. Оценка генеральной дисперсии по первой выборке $\sigma_1^2 = n_1 s_1^2/(n_1 - 1)$. Оценка генеральной дисперсии по второй выборке $\sigma_2^2 = n_2 s_2^2/(n_2 - 1)$. Статистика F = (бóльшая оценка генеральной дисперсии)/(меньшая оценка генеральной дисперсии).

Обозначим через n_A объем выборки, у которой больше оценка генеральной дисперсии, через n_B обозначим объем другой выборки. Так как дисперсия неотрицательна, то нам потребуется одна граничная точка $F_{\alpha; n_A - 1; n_B - 1}$, которую находят из таблицы F-распределения (распределения Фишера). Можно воспользоваться статистической функцией FРАСПОБР(α; $n_A - 1$; $n_B - 1$) мастера функций f_x пакета Excel.

Пример 70. Инвестиция 1 рассчитана на $n_1 = 12$ лет, дисперсия ежегодных прибылей $s_1^2 = 20\%^2$. Инвестиция 2 рассчитана на $n_2 = 10$ лет, дисперсия ежегодных прибылей $s_2^2 = 30\%^2$. Предполагается, что распределение ежегодных прибылей на инвестиции подчиняется нормальному закону распределения. Равны ли риски инвестиций 1 и 2? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Оценка генеральной дисперсии по первой выборке $\sigma_1^2 = n_1 s_1^2/(n_1 - 1) = 12\times20/(12 - 1) \approx 21{,}818$.

Оценка генеральной дисперсии по второй выборке $\sigma_2^2 = n_2 s_2^2/(n_2 - 1) = 10\times30/(10 - 1) \approx 33{,}333$.

Статистика F = (большая оценка генеральной дисперсии)/(меньшая оценка генеральной дисперсии) = 33,333/21,818 ≈ 1,528.

Так как 33,333 > 21,818, то $n_A = 10$, $n_B = 12$.

Проведем двустороннюю проверку.

$\alpha = (1 - p)/2 = (1 - 0{,}95)/2 = 0{,}025 \Rightarrow F_{\alpha;n_A-1;n_B-1} = F_{0{,}025;10-1;12-1} = 3{,}588 \Rightarrow$ граничные точки ±3,588.

Отметим значения на числовой оси.

Мы принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 5%. Риски инвестиций равны.

Задача 55. Инвестиция 1 рассчитана на $n_1 = 14$ лет, дисперсия ежегодных прибылей $s_1^2 = 15\%^2$. Инвестиция 2 рассчитана на $n_2 = 12$ лет, дисперсия ежегодных прибылей $s_2^2 = 20\%^2$. Предполагается, что распределение ежегодных прибылей на инвестиции подчиняется нормальному закону распределения. Равны ли риски инвестиций 1 и 2? Доверительная вероятность $p = 99\%$.

§ 14.4.1. Двухвыборочный F-тест для дисперсии

В Excel существует надстройка *Пакет анализа*, которая позволяет автоматически провести испытание гипотезы о двух генеральных дисперсиях. Нужно воспользоваться командой *Сервис*. В раскрывшемся списке команд должна присутствовать команда *Анализ данных*. При ее отсутствии необходимо выбрать команду *Надстройки* и поставить «галочку» рядом с командой *Пакет анализа*. Если же команда *Пакет анализа* отсутствует, то нужно произвести доустановку Excel.

Сервис → *Анализ данных* → *Двухвыборочный F-тест для дисперсии* → *OK*. Откроется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Интервал переменной 1:* указывается ссылка на ячейки, содержа-

щие значения первой выборки. В графе *Интервал переменной 2:* указывается ссылка на ячейки, содержащие значения второй выборки.

Если первая из ячеек содержит пояснительный текст, то рядом со словом *Метки* нужно поставить «галочку». В графе *Альфа* указывается уровень значимости $1 - p$ (по умолчанию там уже указано 0,05, но исследователь может выбрать и свое значение). Также указываются параметры вывода (*Выходной интервал*, *Новый рабочий лист*, *Новая рабочая книга*) → *OK*. Откроется итоговое окно.

Двухвыборочный F-тест для дисперсии		
	Переменная 1	*Переменная 2*
Среднее	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$
Дисперсия	σ_1^2	σ_2^2
Наблюдения	n_1	n_2
df	$n_1 - 1$	$n_2 - 1$
F	Статистика F	
P(F<=f) односторонняя		
F критическое одностороннее	$F_{\alpha; n_A - 1; n_B - 1}$	

Здесь проверка всегда односторонняя. Если в графе *P(F<=f) односторонняя* указана величина, меньшая выбранного *Альфа*, то мы отклоняем гипотезу H_0 на уровне значимости *Альфа*.

Если же надстройки *Пакет анализа* нет, то можно воспользоваться статистической функцией ФТЕСТ (массив 1; массив 2) мастера функций f_x пакета Excel. Массив 1 и массив 2 — это ссылки на ячейки, содержащие значения двух выборок. Функция ФТЕСТ выдает значение доверительной вероятности p для принятия H_0 при двусторонней проверке. Затем исследователь решает, устраивает ли его такое значение доверительной вероятности.

§ 14.5. СРАВНЕНИЕ СРЕДНИХ ВЕЛИЧИН ДВУХ ВЫБОРОК ПРИ ИЗВЕСТНЫХ ГЕНЕРАЛЬНЫХ ДИСПЕРСИЯХ

Очень часто исследователя интересует, одинаковы или нет средние величины двух выборок, взятых из двух нормальных генеральных совокупностей. При этом известны генеральные дисперсии σ_1^2 и σ_2^2.

H_0: $a_1 = a_2$ (генеральные средние равны), то есть $a_1 - a_2 = 0$.

H_1: $a_1 \neq a_2$.

Граничные точки: z_α (для правосторонней проверки), $-z_\alpha$ (для левосторонней проверки), $\pm z_\alpha$ (для двусторонней проверки). z_α находим по таблице (см. § 13.1).

Статистика $z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$, где $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ — выборочные средние этих выборок.

Пример 71. Автомат 1 и автомат 2 фасуют чай в пачки. Стандартные отклонения $\sigma_1 = 1$ г и $\sigma_2 = 2$ г соответственно. В случайной выборке объема $n_1 = 20$ пачек для автомата 1 средний вес $\overline{X}_1 = 101$ г. В случайной выборке объема $n_2 = 15$ пачек для автомата 2 средний вес $\overline{X}_2 = 98$ г. Верно ли, что оба автомата фасуют чай в пачки однинакового среднего веса? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

H_0: $a_1 = a_2$ (средний вес одинаков), то есть $a_1 - a_2 = 0$.

H_1: $a_1 \neq a_2$.

Проведем двустороннюю проверку.

$\alpha = (1 - p)/2 = (1 - 0,95)/2 = 0,025 \Rightarrow z_\alpha = 1,96 \Rightarrow$ граничные точки $\pm 1,96$.

Статистика $z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = \dfrac{101 - 98}{\sqrt{1^2/20 + 2^2/15}} \approx 5,33.$

Отметим значения на числовой оси.

Мы отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. Средний вес пачек чая для этих автоматов различен.

Задача 56. Автомат 1 и автомат 2 фасуют чай в пачки. Стандартные отклонения $\sigma_1 = 0,5$ г и $\sigma_2 = 1$ г соответственно. В случайной выборке объема $n_1 = 12$ пачек для автомата 1 средний вес $\overline{X}_1 = 81$ г. В случайной выборке объема $n_2 = 16$ пачек для автомата 2 средний вес $\overline{X}_2 = 80$ г. Верно ли, что оба автомата фасуют чай в пачки однинакового среднего веса? Доверительная вероятность $p = 99\%$.

§ 14.5.1. Двухвыборочный z-тест для средних (Excel)

Excel позволяет провести испытание гипотезы о равенстве средних двух нормальных распределений с известными генеральными дисперсиями.

Сервис → *Анализ данных* → *Двухвыборочный z-тест для средних* → *OK*. Раскроется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Интервал переменной 1:* указывается ссылка на ячейки, содержащие значения первой выборки. В графе *Интервал переменной 2:* указывается ссылка на ячейки, содержащие значения второй выборки.

Если первая из ячеек содержит пояснительный текст, то рядом со словом *Метки* нужно поставить «галочку». В графе *Альфа* указывается уровень значимости $1 - p$ (по умолчанию там уже указано 0,05, но исследователь может выбрать и свое значение). В графе *Гипотетическая средняя разность:* пишем 0. В графах *Дисперсия переменной 1 (известная):* и *Дисперсия переменной 2 (известная):* указываются значения σ_1^2 и σ_2^2 соответственно. Также указываются параметры вывода (*Выходной интервал*, *Новый рабочий лист*, *Новая рабочая книга*) → *OK*. Откроется итоговое окно.

Двухвыборочный z-тест для средних		
	Переменная 1	*Переменная 2*
Среднее	$\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$
Известная дисперсия	σ_1^2	σ_2^2
Наблюдения	n_1	n_2
Гипотетическая разность средних	0	
Z	Статистика z	
P(Z<=z) односторонняя		
z критическое одностороннее	z_α для односторонней проверки	
P(Z<=z) двусторонняя		
z критическое двустороннее	z_α для двусторонней проверки	

В графах *P(Z<=z)* дано значение уровня значимости для односторонней и двусторонней проверок. Если это значение меньше заданного *Альфа*, то гипотеза H_0 отвергается.

§ 14.6. ИСПЫТАНИЕ ГИПОТЕЗЫ ПО ВЫБОРОЧНЫМ СРЕДНИМ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ ГЕНЕРАЛЬНЫХ ДИСПЕРСИЯХ

Нужно определить, взяты ли две выборки объема n_1 и n_2 соответственно из нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми средними.

H_0: $a_1 = a_2$ (генеральные средние равны), то есть $a_1 - a_2 = 0$.

$\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ — выборочные средние для первой и второй выборок соответственно, s_1^2 и s_2^2 — выборочные дисперсии для первой и второй выборок соответственно. Вид граничных точек и статистики зависит от того, равны или нет между собой неизвестные генеральные дисперсии. Поэтому сначала надо проверить гипотезу о равенстве двух генеральных дисперсий (см. § 14.4).

§ 14.6.1. Случай равенства генеральных дисперсий

По таблице t-распределения находим $t_{\alpha;n_1+n_2-2}$. Граничные точки: $t_{\alpha;n_1+n_2-2}$ (для правосторонней проверки), $-t_{\alpha;n_1+n_2-2}$ (для левосторонней проверки), $\pm t_{\alpha;n_1+n_2-2}$ (для двусторонней проверки).

Статистика $t = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$.

Пример 72. Для производства каждой из $n_1 = 10$ деталей по первой технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_1 = 30$ с (выборочная дисперсия $s_1^2 = 1$ с^2). Для производства каждой из $n_2 = 16$ деталей по второй технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_2 = 28$ с (выборочная дисперсия $s_2^2 = 2$ с^2). Можно ли сделать вывод, что по первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

Применив результаты § 14.4, получаем, что неизвестные генеральные дисперсии равны.

H_0: $a_1 = a_2$.

H_1: $a_1 > a_2$.

$p = 0{,}95$. Проведем правостороннюю проверку.

$\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow t_{\alpha;n_1+n_2-2} = t_{0{,}05;10+16-2} = 1{,}711$. Это граничная точка. Статистика

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} = \frac{30 - 28}{\sqrt{\dfrac{10\times 1 + 16\times 2}{10 + 16 - 2}\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{16}\right)}} \approx 3{,}75.$$

Отметим значения на числовой оси.

H_0 95% | ~~H_0~~ H_1 5%

1,711   3,75

Отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. По первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали.

Задача 57. Для производства каждой из $n_1 = 12$ деталей по первой технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_1 = 25$ с (выборочная дисперсия $s_1^2 = 1{,}5$ с^2). Для производства каждой из $n_2 = 11$ деталей по второй технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_2 = 23$ с (выборочная дисперсия $s_2^2 = 2$ с^2). Можно ли сделать вывод, что по первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали? Доверительная вероятность $p = 99\%$.

§ 14.6.1.1. Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями

Excel позволяет провести испытание гипотезы о равенстве средних двух нормальных распределений в случае равенства неизвестных генеральных дисперсий.

Сервис → Анализ данных → Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями → OK.

Раскроется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *OK*. Откроется итоговое окно.

Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями		
	Переменная 1	*Переменная 2*
Среднее	$\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$
Дисперсия	s_1^2	s_2^2
Наблюдения	n_1	n_2
Объединенная дисперсия		
Гипотетическая разность средних	0	
df	$n_1 + n_2 - 2$	
t-статистика	Статистика t	
P(T<=t) односторонняя		
t критическое одностороннее	$t_{\alpha;n_1+n_2-2}$ для односторонней проверки	
P(T<=t) двусторонняя		
t критическое двустороннее	$t_{\alpha;n_1+n_2-2}$ для двусторонней проверки	

В графах *P(T<=t)* дано значение уровня значимости для односторонней и двусторонней проверок. Если это значение меньше заданного *Альфа*, то гипотеза H_0 отвергается.

Если надстройки *Пакет анализа* нет, то можно воспользоваться статистической функцией ТТЕСТ (массив 1; массив 2; хвосты; 2) мастера функций f_x пакета Excel. Для односторонней проверки хвосты = 1, для двусторонней проверки хвосты = 2. Функция ТТЕСТ выдает значение уровня значимости, которое нужно сравнить с требуемым уровнем значимости.

§ 14.6.2. Случай неравенства генеральных дисперсий

В этом случае лучше обратиться к *Пакету анализа*. Но при $n_1 \geqslant 30$ и $n_2 \geqslant 30$ можно применить следующую схему.

Граничные точки: z_α (для правосторонней проверки), $-z_\alpha$ (для левосторонней проверки), $\pm z_\alpha$ (для двусторонней проверки). z_α находим по таблице (см. § 13.1).

Статистика $z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1 - 1} + \dfrac{s_2^2}{n_2 - 1}}}$, где $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ — выборочные средние этих выборок.

Пример 73. Для производства каждой из $n_1 = 51$ детали по первой технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_1 = 30$ с (выборочная дисперсия $s_1^2 = 6$ с^2). Для производства каждой из $n_2 = 41$ детали по второй технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_2 = 25$ с (выборочная дисперсия $s_2^2 = 3$ с^2). Можно ли сделать вывод, что по первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

Применив результаты § 14.4, получаем, что неизвестные генеральные дисперсии различны.

H_0: $a_1 = a_2$.

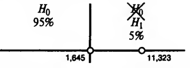
H_1: $a_1 > a_2$.

$p = 0{,}95$. Проведем правостороннюю проверку.

$\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645$. Это граничная точка.

Статистика $z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1 - 1} + \dfrac{s_2^2}{n_2 - 1}}} = \dfrac{30 - 25}{\sqrt{\dfrac{6}{51-1} + \dfrac{3}{41-1}}} \approx 11{,}323.$

Отметим значения на числовой оси.



Отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. По первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали.

Задача 58. Для производства каждой из $n_1 = 51$ деталей по первой технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_1 = 32$ с (выборочная дисперсия $s_1^2 = 9$ с^2). Для производства каждой из $n_2 = 41$ деталей по второй технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_2 = 28$ с (выборочная дисперсия $s_2^2 = 4$ с^2). Можно ли сделать вывод, что по первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали? Доверительная вероятность $p = 90\%$.

§ 14.6.2.1. Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями

Excel позволяет провести испытание гипотезы о равенстве средних двух нормальных распределений в случае неравенства неизвестных генеральных дисперсий.

Сервис → Анализ данных → Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями → ОК. Далее см. § 14.6.1.1. Для этого случая ТТЕСТ (массив 1; массив 2; хвосты; 3).

§ 14.7. ИСПЫТАНИЕ ГИПОТЕЗ ПО ДВУМ ВЫБОРОЧНЫМ ДОЛЯМ

Нужно дать заключение по двум выборкам большого объема ($n_1 \geqslant 30$, $n_2 \geqslant 30$) с выборочными долями $\hat{p}_1$ и $\hat{p}_2$, взяты ли они из генеральных совокупностей с одинаковой генеральной долей.

H_0: $p_1 = p_2$ (генеральные доли одинаковы).

Граничные точки: z_α (для правосторонней проверки), $-z_\alpha$ (для левосторонней проверки), $\pm z_\alpha$ (для двусторонней проверки). z_α находим по таблице (см. § 13.1).

Статистика $z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$, где $\overline{p}$ — выборочная доля для объединенной выборки.

Пример 74. Проводились испытания нового лекарства. В эксперименте участвовали $n_1 = 3000$ мужчин и $n_2 = 3500$ женщин. У 50 мужчин и 110 женщин наблюдались побочные эффекты. Можно ли утверждать, что побочные эффекты от нового лекарства у женщин возникают чаще, чем у мужчин? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

Выборочные доли $\hat{p}_1 = 50/3000 \approx 0{,}017$, $\hat{p}_2 = 110/3500 \approx 0{,}031$.

H_0: $p_1 = p_2$ (генеральные доли одинаковы).

H_1: $p_1 < p_2$.

Проведем левостороннюю проверку. $\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645 \Rightarrow$ граничная точка $-1{,}645$. Выборочная доля для объединенной выборки $\overline{p} = (50 + 110)/(3000 + 3500) \approx 0{,}025$.

$$\text{Статистика } z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} =$$

$$= \frac{0{,}017 - 0{,}031}{\sqrt{0{,}025 \times (1 - 0{,}025)\left(\dfrac{1}{3000} + \dfrac{1}{3500}\right)}} \approx -3{,}604.$$

Отметим значения на числовой оси.

$\xcancel{H_0}$ H_1 5% | H_0 95%

$-3{,}604$ $-1{,}645$

Отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. Побочные эффекты от нового лекарства у женщин возникают чаще, чем у мужчин.

Задача 59. Проводились испытания нового лекарства. В эксперименте участвовали $n_1 = 2000$ мужчин и $n_2 = 2500$ женщин. У 40 мужчин и 70 женщин наблюдались побочные эффекты. Можно ли утверждать, что побочные эффекты от нового лекарства у женщин возникают чаще, чем у мужчин? Доверительная вероятность $p = 99\%$.

§ 14.8. ИСПЫТАНИЕ ГИПОТЕЗ ПО СПАРЕННЫМ ДАННЫМ

Иногда выборки не являются независимыми из-за наличия факторов, влияющих на выборки неизвестным путем. Тогда группируют элементы попарно (по одному из каждой выборки) и проводят испытание гипотезы на среднюю разностей между парными измерениями.

Пусть n — объем парной выборки. В каждой паре находим d — разность значений. Для полученных разностей ищем выборочную среднюю $\overline{X}_d$ и выборочное стандартное отклонение s_d. По таблице t-распределения находим $t_{\alpha;n-1}$.

Граничные точки: $t_{\alpha;n-1}$ (для правосторонней проверки), $-t_{\alpha;n-1}$ (для левосторонней проверки), $\pm t_{\alpha;n-1}$ (для двусторонней проверки).

Статистика $t = \dfrac{\overline{X}_d}{s_d/\sqrt{n-1}}$.

Пример 75. Можно ли утверждать, что шины заводов 1 и 2 имеют разную износоустойчивость? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

Номер машины	X — расстояние для шин завода 1, тыс. км	Y — расстояние для шин завода 2, тыс. км	$d = X - Y$	d^2
1	60,2	59,4	0,8	0,64
2	62,3	58,3	4	16
3	61,3	62,1	−0,8	0,64
4	60,7	63,4	−2,7	7,29
5	63,4	60,8	2,6	6,76
Сумма	—	—	3,9	31,33

$\overline{X}_d = (\sum d)/n = 3{,}9/5 = 0{,}78.$

$s_d^2 = (\sum d^2)/n - \overline{X}_d^2 = 31{,}33/5 - 0{,}78^2 = 5{,}6576.$ $s_d \approx 2{,}379.$

H_0: средняя $a_d = 0$ (нет разницы между шинами).

H_1: $a_d \neq 0$ (есть разница).

Проведем двустороннюю проверку.

$\alpha = (1 - p)/2 = (1 - 0{,}95)/2 = 0{,}025 \Rightarrow t_{\alpha;n-1} = t_{0,025;5-1} = 2{,}776 \Rightarrow$ граничные точки $\pm 2{,}776$.

Статистика $t = \dfrac{\overline{X}_d}{s_d/\sqrt{n-1}} = \dfrac{0{,}78}{2{,}379/\sqrt{5-1}} \approx 0{,}656.$

Отметим значения на числовой оси.

~~H_0~~ H_1 2,5%	H_0 95%	~~H_0~~ H_1 2,5%
−2,776	0,656	2,776

Принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 5%. Износоустойчивость шин одинакова.

Задача 60. Можно ли утверждать, что шины заводов 1 и 2 имеют разную износоустойчивость? Доверительная вероятность $p = 99\%$.

Номер машины	X — расстояние для шин завода 1, тыс. км	Y — расстояние для шин завода 2, тыс. км
1	62,4	61,8
2	61,8	62,3
3	63,2	60,6
4	57,4	59,2
5	59,6	62,1

§ 14.8.1. Парный двухвыборочный t-тест для средних

Excel позволяет провести парный тест. *Сервис → Анализ данных → Парный двухвыборочный t-тест для средних → OK*. Раскроется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *OK*. Появляется итоговое окно.

Парный двухвыборочный t-тест для средних		
	Переменная 1	*Переменная 2*
Среднее	$\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$
Дисперсия		
Наблюдения	n	n
Корреляция Пирсона		
Гипотетическая разность средних	a_d	
df	$n - 1$	
t-статистика	Статистика t	
P(T<=t) односторонняя		
t критическое одностороннее	$t_{\alpha;n-1}$ для односторонней проверки	
P(T<=t) двусторонняя		
t критическое двустороннее	$t_{\alpha;n-1}$ для двусторонней проверки	

В графах $P(T<=t)$ дано значение уровня значимости для односторонней и двусторонней проверок. Если это значение меньше заданного *Альфа*, то гипотеза H_0 отвергается.

Если же надстройки *Пакет анализа* нет, то можно воспользоваться статистической функцией ТТЕСТ (массив 1; массив 2; хвосты; 1) мастера функций f_x пакета Excel.

§ 14.9. КРИТЕРИЙ ХИ-КВАДРАТ

До сих пор мы предполагали, что генеральные совокупности распределены нормально или приблизительно нормально. Теперь мы откажемся от этих условий. Будем проверять гипотезу о наличии связи между значениями двух величин.

H_0: нет связи между значениями двух величин.

H_1: есть связь между значениями двух величин.

Составляется *таблица наблюдаемых частот*. По строкам изменяются значения первой величины, по столбцам — значения второй величины. В клетке с индексами (i, j) записана частота $f_0 = n_{ij}$ — число элементов, у которых значения первой и второй величин равны i и j соответственно. f_0 — наблюдаемая частота события.

По таблице наблюдаемых частот строят показанным далее способом *таблицу ожидаемых частот*. f_E — ожидаемая частота события. Должно выполняться условие $f_E \geqslant 5$ для каждой клетки таблицы, иначе надо объединить какие-то строки или столбцы.

Таблицу наблюдаемых частот и таблицу ожидаемых частот часто называют *таблицами сопряженности*. Пусть n — общее число наблюдений, m = (число строк таблицы − 1) × (число столбцов таблицы − 1). Если таблица сопряженности содержит только одну строку, то m = число столбцов таблицы − 1.

Доверительная вероятность p, уровень значимости $\alpha = 1 - p$. Для α и m по таблице χ^2-распределения («хи-квадрат») находим $\chi^2_{\alpha,m}$. Это граничная точка.

Статистика $\chi^2 = \sum \dfrac{(f_0 - f_E)^2}{f_E}$.

Если таблица сопряженности имеет размер 2×2 и $n \leqslant 100$, то вводится поправка Йетса: $\chi^2 = \sum \dfrac{(|f_0 - f_E| - 0{,}5)^2}{f_E}$.

Отметим значения на числовой оси.

Для нахождения $\chi^2_{\alpha,m}$ можно воспользоваться статистической функцией ХИ2ОБР(α; *m*) мастера функций f_x пакета Excel.

Пример 76. Студенты сдавали экзамены по математике и физике. Есть ли связь между результатами экзаменов?

Результаты экзаменов по математике	Результаты экзаменов по физике			
	пять	четыре	три	два
пять	25	18	10	5
четыре	20	16	15	6
три	15	20	22	13
два	8	10	7	15

Это таблица наблюдаемых частот f_0. В клетке (1, 1) написано число 25, то есть 25 человек получили и по физике, и по математике отличные оценки. В клетке (4, 2) написано число 10, то есть 10 человек получили хорошие оценки по физике и неудовлетворительные оценки по математике. И т. д.

H_0: нет связи между оценками.

H_1: есть связь между оценками.

Построим таблицу ожидаемых частот f_E. Суммируем числа по строкам и столбцам.

Результаты экзаменов по математике	Результаты экзаменов по физике				Сумма
	пять	четыре	три	два	
пять	25	18	10	5	58
четыре	20	16	15	6	57
три	15	20	22	13	70
два	8	10	7	15	40
Сумма	68	64	54	39	225

Всего получены результаты экзаменов $n = 225$ человек. Отличный результат по математике показали 58 человек, то есть доля тех, кто получил отличные оценки по математике, равна 58/225. Если верна гипотеза H_0, то можно ожидать, что 58/225 из 68 студентов, получивших по физике отличные оценки, показали отличные знания и по математике. Аналогично можно рассчитать и другие ожидаемые частоты.

Результаты экзаменов по математике	Результаты экзаменов по физике				Сумма
	пять	четыре	три	два	
пять	68×58/225	64×58/225	54×58/225	39×58/225	58
четыре	68×57/225	64×57/225	54×57/225	39×57/225	57
три	68×70/225	64×70/225	54×70/225	39×70/225	70
два	68×40/225	64×40/225	54×40/225	39×40/225	40
Сумма	68	64	54	39	225

Ожидаемые частоты нельзя округлять до целого значения.

Результаты экзаменов по математике	Результаты экзаменов по физике				Сумма
	пять	четыре	три	два	
пять	17,5	16,5	13,9	10,9	58
четыре	17,2	16,2	13,7	9,9	57
три	21,2	19,9	16,8	12,1	70
два	12,1	11,4	9,6	6,9	40
Сумма	68	64	54	39	225

Если в какой-то клетке получилось значение < 5, то с целью уничтожения этого в таблицах нужно объединить какие-то строки или столбцы. При округлении надо следить, чтобы исходные суммы не изменились.

Доверительная вероятность $p = 0{,}95$, уровень значимости $\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$. m = (число строк таблицы − 1)×(число столбцов таблицы − 1) = (4 − 1)×(4 − 1) = 9.

Для α и m по таблице χ^2-распределения находим $\chi^2_{\alpha,m} = \chi^2_{0,05;9} = 16{,}92$. Это граничная точка. Найдем значение статистики χ^2.

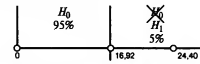
f_0	f_E	$f_0 - f_E$	$(f_0 - f_E)^2$	$(f_0 - f_E)^2/f_E$
25	17,5	7,5	56,25	3,21
20	17,2	2,8	7,84	0,46
15	21,2	−6,2	38,44	1,81
8	12,1	−4,1	16,81	1,39
18	16,5	1,5	2,25	0,14
16	16,2	−0,2	0,04	0,00
20	19,9	0,1	0,01	0,00
10	11,4	−1,4	1,96	0,17
10	13,9	−3,9	15,21	1,09
15	13,7	1,3	1,69	0,12
22	16,8	5,2	27,04	1,61
7	9,6	−2,6	6,76	0,70
5	10,1	−5,1	26,01	2,58
6	9,9	−3,9	15,21	1,54
13	12,1	0,9	0,81	0,07
15	6,9	8,1	65,61	9,51
Сумма	—	0	—	24,40

Поясним, как заполняется таблица.

Наблюдаемые частоты f_0 пишем в 1-м столбце, а соответствующие им ожидаемые частоты f_E — во 2-м столбце.

Далее производим над столбцами действия, указанные в 1-й строке.

Статистика $\chi^2 = \sum \frac{(f_0 - f_E)^2}{f_E} = 24{,}40$ (сумма чисел 5-го столбца). Отметим значения на числовой оси.



Отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. Есть связь между оценками, полученными студентами на экзаменах по математике и физике.

Замечание. Вместо заполнения последней таблицы можно воспользоваться статистической функцией ХИ2ТЕСТ мастера функций f_x пакета Excel. f_x → *статистические* → *ХИ2ТЕСТ* → *OK*. Появляется диалоговое окно. В графе ***фактический интервал*** указывается ссылка на ячейки, в которых хранятся наблюдаемые частоты. В графе ***ожидаемый интервал*** указывается ссылка на ячейки, в которых хранятся ожидаемые частоты. *OK*. Если полученное значение превышает уровень значимости $\alpha = 1 - p$, то гипотеза H_0 отклоняется.

Задача 61. Студенты сдавали экзамены по математике и физике. Есть ли связь между результатами экзаменов? Доверительная вероятность 99%.

Результаты экзаменов по математике	Результаты экзаменов по физике			
	пять	четыре	три	два
пять	20	17	12	6
четыре	22	15	17	5
три	21	19	20	12
два	9	8	7	18

Глава 15

ИНДЕКСЫ

§ 15.1. ИНДЕКСЫ РОСТА И ПРИРОСТА

Индекс (темп) роста — это отношение показателя в настоящий момент времени к величине этого показателя в прошедший момент времени, выраженное в процентах. *Индекс (темп) прироста* — это отношение разности показателей в настоящий и прошедший моменты времени к величине этого показателя в прошедший момент времени, выраженное в процентах.

Индекс прироста = индекс роста − 100%. Поэтому все сказанное в дальнейшем об индексах роста верно и для индексов прироста.

Пример 77. Цена товара составила в феврале 50 рублей, а в мае — 60 рублей. Найдем индексы роста и прироста.

Индекс роста = 60/50 × 100% = 120%, то есть цена повысилась в 1,2 раза.

Индекс прироста = (60 − 50)/50 × 100% = 20%, то есть цена повысилась на 20%.

Задача 62. Цена товара составила в феврале 75 рублей, а в мае — 90 рублей. Найти индексы роста и прироста.

§ 15.2. БАЗИСНЫЕ И ЦЕПНЫЕ ИНДЕКСЫ

При расчете *базисного индекса роста* данные за некоторый момент времени принимаются за базисные. Тогда базисный индекс роста равен отношению показателя в каждый момент времени и показателя в базисный момент времени.

Цепной индекс роста — это отношение показателя в последующий момент времени к величине показателя в предшествующий момент времени.

Пример 78. Цена товара составила в феврале 50 рублей, в марте — 70 рублей, в апреле — 80 рублей, в мае — 95 рублей. Выберем февраль за базовый месяц.

Тогда I (март, февраль) = 70/50 × 100% = 140%, то есть цена товара в марте по отношению к цене февраля повысилась на 40%.

I (апрель, февраль) = 80/50 × 100% = 160%, то есть цена товара в апреле по отношению к цене февраля повысилась на 60%.

I (май, февраль) = 95/50 × 100% = 190%, то есть цена товара в мае по отношению к цене февраля повысилась на 90%.

Определим цепные индексы.

I (апрель, март) = 80/70 × 100% ≈ 114%.

I (май, апрель) = 95/80 × 100% = 118,75%.

Задача 63. Цена товара составила в феврале 40 рублей, в марте — 60 рублей, в апреле — 70 рублей, в мае — 100 рублей. Определить базисные и цепные индексы (март — базовый месяц).

§ 15.3. ПЕРЕХОД ОТ ОДНИХ ИНДЕКСОВ К ДРУГИМ

Перемножив последовательно цепные индексы, мы получим базисный индекс. Цепной индекс в момент времени t равен умноженному на 100% отношению базисного индекса в момент времени t к базисному индексу в предшествующий момент времени.

Пример 79. В примере 78 цепной индекс I (апрель, март) = I (апрель, февраль) / I (март, февраль) × 100% = 1,6/1,4 × 100% ≈ 114%.

Базисный индекс I (май, февраль) = I (март, февраль) × I (апрель, март) × I (май, апрель) × 100% = 1,4 × 1,14 × 1,1875 × 100% ≈ 190%.

Задача 64. В задаче 63 выразить базисный индекс I (май, март) через цепные индексы и цепной индекс I (май, апрель) через базисные индексы.

§ 15.4. СРЕДНИЙ ИНДЕКС РОСТА ДЛЯ СГРУППИРОВАННЫХ ДАННЫХ

Индекс группы $I = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i I_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$, где x_i — значение i-го элемента в момент времени t, I_i — индекс роста i-го элемента группы в долях, n — число элементов в группе.

Пример 80. Известны данные по объему продаж товаров $А$, $Б$, $В$, $Г$ в 2006 году и рост (в %) объема продаж в 2007 году. Определим средний индекс роста.

Товар	Объем продаж в 2006 году	Рост (в %) за год	Объем продаж в 2007 году
А	50	20	$50 + 0{,}2 \times 50 = 60$
Б	60	10	$60 + 0{,}1 \times 60 = 66$
В	70	30	$70 + 0{,}3 \times 70 = 91$
Г	40	50	$40 + 0{,}5 \times 40 = 60$
Сумма	220	—	277

Средний индекс роста равен $I = 277/220 \times 100\% \approx 126\%$.

Задача 65. Известны данные по объему продаж товаров *А*, *Б*, *В*, *Г* в 2006 году и рост (в %) объема продаж в 2007 году. Определить средний индекс роста.

Товар	Объем продаж в 2006 году	Рост (в %) за год
А	45	10
Б	30	15
В	50	30
Г	20	20

Глава 16

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Очень часто исследователя интересует связь между переменными. Это помогает при анализе их поведения. В этой главе будет разработана модель для описания связи между переменными с математической точки зрения. Начнем с наиболее простых для анализа линейных уравнений.

§ 16.1. ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Существует или нет линейная связь между двумя переменными x, y? Проводим случайную выборку. При значениях $x_1, x_2, ..., x_n$ мы наблюдаем значения $y_1, y_2, ..., y_n$ соответственно. На плоскости Oxy отметим точки с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$.

Предположим, что точки группируются вокруг некоторой прямой линии $y = a + bx$. Тогда: $b = \dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^2}$, $a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

Точки не находятся точно на линии $y = a + bx$. Но это неудивительно. Ведь помимо x на поведение y оказывают влияние и другие факторы. Дальнейший анализ полученного уравнения позволяет сказать, насколько сильно влияние неучтенных факторов, действительно ли модель линейна и т. д. На переменные x, y накладывается ряд условий. Для описания природы связи используется термин *«регрессия»*. Коэффициент b называется *показателем наклона линии линейной регрессии.*

Пример 81. Изучается зависимость себестоимости единицы изделия (y, тыс. руб.) от величины выпуска продукции (x, тыс. шт.) по группам предприятий за отчетный период. Экономист обследовал $n = 5$ предприятий и получил следующие результаты (2-й и 3-й столб-

цы). Полагая, что между переменными x, y имеет место линейная зависимость, определим выборочное уравнение линейной регрессии.

Заполним таблицу.

Номер	x	y	x^2	xy
1	2	1,9	4	3,8
2	3	1,7	9	5,1
3	4	1,8	16	7,2
4	5	1,6	25	8
5	6	1,4	36	8,4
Сумма	20	8,4	90	32,5

Поясним, как заполняется таблица. В 4-м столбце указаны квадраты соответствующих чисел 2-го столбца. Каждое число 2-го столбца умножаем на соответствующее число 3-го столбца и результат пишем в 5-м столбце. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} = \frac{5\times 32,5 - 20\times 8,4}{5\times 90 - 20^2} = -0,11.$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{8,4 - (-0,11)\times 20}{5} = 2,12.$$

$$y = a + bx = 2,12 + (-0,11)x.$$

Задача 66. Фирма провела рекламную кампанию. Через 10 недель фирма решила проанализировать эффективность этого вида рекламы, сопоставив недельные объемы продаж (y, тыс. руб.) с расходами на рекламу (x, тыс. руб.).

Полагая, что между переменными x, y имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии.

x	5	8	6	5	3	9	12	4	3	10
y	72	76	78	70	68	80	82	65	62	90

Замечание. Вместо вычислений коэффициентов a и b по формулам можно воспользоваться соответственно статистическими функциями ОТРЕЗОК (изв_знач_y; изв_знач_x) и НАКЛОН (изв_знач_y; изв_знач_x) мастера функций f_x пакета Excel. Здесь изв_знач_y и изв_знач_x — это ссылки на ячейки, содержащие значения переменных y и x соответственно.

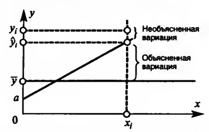
Обозначим через $\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ и $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ средние значения переменных y и x соответственно.

§ 16.2. ОШИБКИ

Проводим случайную выборку. При значениях $x_1, x_2, ..., x_n$ мы наблюдаем значения $y_1, y_2, ..., y_n$ соответственно. Получено уравнение $\hat{y} = a + bx$. Если вместо x подставить в это уравнение значения $x_1, x_2, ..., x_n$, то будут получены значения $\hat{y}_1, \hat{y}_2, ..., \hat{y}_n$, которые, вообще говоря, будут отличаться от $y_1, y_2, ..., y_n$. Разница $y_i - \hat{y}_i = e_i$ называется *ошибкой* (остатком, отклонением). Значения коэффициентов a и b в уравнении $y = a + bx$, которые рассчитывались по приведенным в § 16.1 формулам, подбирались так, чтобы минимизировать сумму $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$. Говорят, что они получены *методом наименьших квадратов* (МНК).

§ 16.3. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ ПИРСОНА. КОЭФФИЦИЕНТ ДЕТЕРМИНАЦИИ

Мы хотим знать, насколько хорошо приближает наши данные линейная модель. $y_i - \overline{y} = (y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \overline{y}) = (\hat{y}_i - \overline{y}) + e_i$.



Формула $y = a + bx$ только частично объясняет вариацию значений y (а именно, слагаемое $\hat{y}_i - \overline{y}$). Но ведь на y влияют и другие факторы. Их влияние скрыто в остатке e_i. Если бы связь была строго линейной, то $e_i = 0$. И так для каждой точки x_i.

$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$ — это общая вариация переменной y.

$\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \overline{y})^2$ — это вариация переменной y, которая объясняется формулой $y = a + bx$.

$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$ — это вариация переменной y, которая не объясняется формулой $y = a + bx$.

Введем характеристику $r^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \overline{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}$ — *коэффициент детерминации*. Эта мера показывает величину вариации переменной y, которая объясняется переменной x при наличии линейной связи этих величин. В случае строгой линейной зависимости между x и y $r^2 = 1$. Если зависимость между x и y отсутствует, то $r^2 = 0$.

Коэффициент детерминации не указывает причины и следствия. Он просто является математическим выражением взаимосвязи между переменными и показывает степень их взаимосвязанных изменений, хотя в экономической теории и можно постулировать причинно-следственную связь между этими переменными.

Коэффициент корреляции Пирсона:

$$r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \overline{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - \sum_{i=1}^{n}x_i \sum_{i=1}^{n}y_i}{\sqrt{\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)\left(n\sum_{i=1}^{n}y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2\right)}}. \ |r| \leqslant 1.$$

Вторая дробь — удобная расчетная формула, которую чаще всего используют.

Коэффициент корреляции Пирсона r содержит информацию о поведении y с ростом x. Знак коэффициента корреляции Пирсона r совпадает со знаком коэффициента b. Чем ближе r к 1, тем ближе связь между x и y к линейной. При $r = 0$ линейной связи между x и y не существует (но, возможно, между x и y есть другая зависимость).

Сильная корреляция между переменными необязательно указывает на причину и следствие. Например, может быть установлена сильная корреляция между зарплатой учителя и продажей спиртных напитков. Отсюда никак нельзя сделать вывод, что учителя пьют. Просто обе эти величины связаны через другую переменную — общий уровень наличного дохода. Это пример *ложной корреляции*.

Пример 82. Найдем остатки e_i, коэффициент корреляции Пирсона и коэффициент детерминации в примере 81.

$y = 2{,}12 - 0{,}11x$. Заполним таблицу.

Номер	x	y	y^2	$\hat{y} = 2{,}12 - 0{,}11x$	$e = y - \hat{y}$
1	2	1,9	3,61	1,90	0,00
2	3	1,7	2,89	1,79	–0,09
3	4	1,8	3,24	1,68	0,12
4	5	1,6	2,56	1,57	0,03
5	6	1,4	1,96	1,46	–0,06
Сумма	20	8,4	14,26		

Поясним, как заполняется таблица. В 4-м столбце указаны квадраты соответствующих чисел 3-го столбца. Каждое число 2-го столбца подставляем в выражение $2{,}12 - 0{,}11x$ и результат пишем в 5-м столбце. В 6-м столбце указана разность чисел 3-го и 5-го столбцов. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)\left(n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right)}} =$$

$$= \frac{5\times 32{,}5 - 20\times 8{,}4}{\sqrt{(5\times 90 - 20^2)(5\times 14{,}26 - 8{,}4^2)}} \approx -0{,}904.$$

Это значение близко к -1, что свидетельствует об очень сильной отрицательной связи (с ростом x значения y убывают). Знаки $b = -0{,}11$ и $r = -0{,}904$ совпадают.

Коэффициент детерминации $r^2 = (-0{,}904)^2 \approx 0{,}817$, то есть 81,7% общей вариации себестоимости y зависит от выпуска продукции x.

Наша модель не объясняет 18,3% вариации себестоимости. Эта часть вариации объясняется факторами, не включенными в модель.

Задача 67. Найти остатки e_i, коэффициент корреляции Пирсона и коэффициент детерминации в задаче 66.

Замечание. Для вычисления коэффициента корреляции Пирсона можно воспользоваться статистическими функциями ПИРСОН (массив 1; массив 2) или КОРРЕЛ (массив 1; массив 2) мастера функций f_x пакета Excel. *Массив 1* и *массив 2* — это ссылки на ячейки, содержащие значения переменных. Для вычисления коэффициента детерминации можно воспользоваться статистической функцией КВПИРСОН (изв_знач_*y*; изв_знач_*x*).

§ 16.4. ПРЕДСКАЗАНИЯ И ПРОГНОЗЫ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ РЕГРЕССИИ

Мы можем воспользоваться построенной моделью для нахождения значения y при известном значении x. Модель строилась по значениям $x_1, x_2, ..., x_n$. Поэтому поиск значения y для x из интервала (x_1, x_n) называется *предсказанием*, а поиск значения y для x вне интервала (x_1, x_n) называется *прогнозом*. Чем дальше расположен x от интервала (x_1, x_n), тем менее точным будет прогноз.

Пример 83. Найдем ожидаемое значение себестоимости y при выпуске продукции $x = 5{,}5$ тыс. шт.

$y = 2{,}12 - 0{,}11x$.

Тогда $y(5{,}5) = 2{,}12 - 0{,}11 \times 5{,}5 = 1{,}515$ тыс. руб.

Задача 68. Найти ожидаемое значение еженедельного объема продаж y при расходах на рекламу $x = 5{,}5$ тыс. руб. в задаче 66.

Замечание. Для прогноза значений переменной y можно воспользоваться статистической функцией ТЕНДЕНЦИЯ (изв_знач_*y*; изв_знач_*x*; нов_знач_*x*; константа) мастера функций f_x пакета Excel. Нов_знач_*x* — это ссылка на ячейки, содержащие значения переменной x, для которых ищется прогноз. Если необязательный аргумент *константа* = 0, то коэффициент $a = 0$. По известным значениям переменных x, y функция сама подбирает уравнение прямой линии и дает прогноз. Функцию ТЕНДЕНЦИЯ можно использовать и в случае множественной линейной регрессии. Для парной линейной регрессии можно воспользоваться и статистической функцией ПРЕДСКАЗ (*x*; изв_знач_*y*; изв_знач_*x*), где x — это значение переменной x, для которого ищется прогноз.

§ 16.5. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ МОДЕЛИ ПАРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

1. Связь между переменными x, y является линейной.
2. Независимая переменная x может быть использована для прогноза y.
3. Остатки (то есть ошибки) нормально распределены.
4. Для всех данных x математическое ожидание ошибки равно нулю и дисперсия ошибки постоянна.
5. Ошибки независимы.

§ 16.6. РЕГРЕССИЯ И Excel

Обычно зависимую переменную называют *результативным признаком*, а независимую переменную — *фактором*. Очень часто наблюдается случай, когда результативный признак зависит не от одного, а от многих факторов.

Тогда вместо парной линейной регрессии используют множественную линейную регрессию: $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_mx_m$.

Пусть n — число наблюдений, m — число объясняющих переменных.

Excel позволяет при построении уравнения линейной регрессии большую часть работы сделать очень быстро. Важно понять, как интерпретировать полученные результаты. Воспользуемся надстройкой *Пакет анализа*.

Сервис → Анализ данных → Регрессия → ОК. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Входной интервал Y:* указывается ссылка на ячейки, содержащие значения результативного признака y. В графе *Входной интервал X:* указывается ссылка на ячейки, содержащие значения факторов $x_1, ..., x_m$ ($m \leqslant 16$). Если первая из ячеек содержит пояснительный текст, то рядом со словом *Метки* нужно поставить «галочку».

Уровень надежности (доверительная вероятность) по умолчанию предполагается равным 95%. Если исследователя это значение не устраивает, то рядом со словами *Уровень надежности* нужно поставить «галочку» и указать требуемое значение. Поставив «галочку» рядом со словом *константа-ноль*, исследователь получит $b_0 = 0$ по умолчанию.

Если нужны значения остатков e_i и их график, то нужно поставить «галочки» рядом со словами *Остатки* и *График остатков*. Также указываются параметры вывода (*Выходной интервал, Новый рабочий лист, Новая рабочая книга*). *ОК.* Появляется итоговое окно *Вывод итогов*.

Если число в графе *Значимость F* превышает 1 – *Уровень надежности*, то принимается гипотеза о равенстве нулю коэффициента детерминации.

Если *Р-значение* превышает 1 – *Уровень надежности*, то соответствующая переменная статистически незначима и ее можно исключить из модели.

Нижние 95% и *Верхние 95%* — это нижние и верхние границы 95-процентных доверительных интервалов для коэффициентов теоретического уравнения линейной регрессии. Если исследователь

ВЫВОД ИТОГОВ								
Регрессионная статистика								
Множественный R	R							
R-квадрат	R^2							
Нормированный R-квадрат	$\bar{R}^2$							
Стандартная ошибка	S							
Наблюдения	n							

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	m	$\sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2$	SS/df	Статистика F= = MS(регр)/ MS(ост)	
Остаток	$n-m-1$	$\sum(y_i-\hat{y}_i)^2$	SS/df		
Итого	$n-1$	Сумма			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*	*Нижние*	*Верхние*
у-пересечение	b_0	S_{b_0}	t_{b_0}					
x_1	b_1	S_{b_1}	t_{b_1}					
x_2	b_2	S_{b_2}	t_{b_2}					

ВЫВОД ОСТАТКА

Наблюдение	*Предсказанный у*	*Остатки*
Номер	$\hat{y}_i$	e_i

согласился с принятым по умолчанию значением доверительной вероятности, то последние два столбца будут дублировать два предыдущих. Если исследователь вводил свое значение доверительной вероятности p, то последние два столбца содержат значения соответственно нижней и верхней границы p-процентных доверительных интервалов.

Если надстройки *Пакет анализа* нет, то можно воспользоваться статистической функцией ЛИНЕЙН мастера функций f_x пакета Excel. Перед вызовом этой функции нужно выделить диапазон ячеек следующего размера (для парной регрессии это блок размера 5×2).

Тогда после выполнения процедуры в ячейках будут находиться указанные величины. f_x → *статистические* → *ЛИНЕЙН* → *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. Если исследо-

b_m	b_{m-1}	...	b_1	b_0
S_{b_m}	$S_{b_{m-1}}$	...	S_{b_1}	S_{b_0}
R^2	S			
Статистика F	$n-m-1$			
$\Sigma(\hat{y}_i-\bar{y})^2$	$\Sigma(y_i-\hat{y}_i)^2$			

вателю требуется $b_0 = 0$, то в графе *константа* нужно ввести значение 0. В графе *статистика* указывается значение 1. После этого нажимается не *OK*, а комбинация клавиш *Ctrl* + *Shift* + *Enter**.

* Подробнее о применении моделей множественной линейной регрессии и о возникающих при этом проблемах (гетероскедастичность, автокорреляция, фиктивные переменные, нелинейные связи) читатель может узнать из книги: *Просветов Г. И.* Эконометрика: Задачи и решения. 5-е изд. — М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Глава 17

ПОРЯДКОВЫЕ ИСПЫТАНИЯ

До этого момента мы работали с данными, которые можно измерить. Но бывают ситуации, когда важнее упорядочивание данных, чем прямое измерение. Это — *порядковые испытания*, а сами данные называются порядковыми. Для порядковых данных составляются две последовательности одинаковой длины $n \geqslant 10$. Нас интересует, есть ли между ними связь. Задается доверительная вероятность p, уровень значимости $\alpha = 1 - p$.

H_0: между двумя последовательностями нет связи, они не согласованы друг с другом.

H_1: между двумя последовательностями существует некая связь.

По α находим по таблице граничную точку $z_\alpha > 0$ (см. § 13.1). Для последовательностей вычисляем *ранговый коэффициент корреляции Спирмена* $r_s = 1 - 6\dfrac{\sum d^2}{n(n^2-1)}$. Статистика $z = r_s\sqrt{n-1}$.

Пример 84. Два человека дегустируют 10 сортов чая. Каждый из них расположил эти сорта в порядке убывания предпочтений (второй и третий столбцы). Есть ли какая-нибудь связь между этими результатами? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

Сорт чая	Дегустатор 1	Дегустатор 2	d	d^2
А	6	5	1	1
Б	4	6	−2	4
В	3	4	−1	1
Г	10	7	3	9
Д	5	1	4	16
Е	1	2	−1	1
Ж	8	8	0	0
З	2	3	−1	1
И	7	9	−2	4
К	9	10	−1	1
Сумма	—	—	—	38

d — это разность между значениями дегустаторов для одного и того же сорта чая, то есть 4-й столбец — это разность 2-го и 3-го столбцов. Каждое число 4-го столбца возводим в квадрат и результат пишем в 5-м столбце. В последней строке указана сумма чисел 5-го столбца.

H_0: между результатами этих исследований нет связи, они не согласованы друг с другом.

H_1: между результатами этих исследований существует некая связь.

$p = 0{,}95$, $\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow z_\alpha = z_{0{,}05} = 1{,}645$. Это граничная точка.

Ранговый коэффициент корреляции Спирмена:

$$r_s = 1 - 6\frac{\sum d^2}{n(n^2-1)} = 1 - 6\frac{38}{10(10^2-1)} \approx 0{,}77.$$

Статистика $z = r_s\sqrt{n-1} = 0{,}77\sqrt{10-1} = 2{,}31 > 1{,}645$.

Мы отвергаем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. Между результатами исследований существует некая связь.

Задача 69. Два человека дегустируют 10 сортов чая. Каждый из них расположил эти сорта в порядке убывания предпочтений (второй и третий столбцы). Есть ли какая-нибудь связь между этими результатами? Доверительная вероятность $p = 99\%$.

Сорт чая	Дегустатор 1	Дегустатор 2
А	1	2
Б	7	6
В	5	3
Г	6	7
Д	2	1
Е	3	4
Ж	4	5
З	9	10
И	8	8
К	10	9

Глава 18

ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Дисперсионный анализ дает общую схему проверки статистических гипотез, основанную на тщательном изучении различных источников вариации (изменчивости, неоднородности) в сложной ситуации. Он позволяет оценить влияние одного или нескольких факторов на результирующий признак.

Предположения, лежащие в основе дисперсионного анализа, довольно жесткие и подчеркивают тот факт, что данный метод следует использовать только для таких зависимых переменных, которые были тщательно изучены и точно измерены. До тех пор, пока объемы выборок приблизительно равны, дисперсионный анализ может мириться с некоторым нарушением допущений модели. Но в ситуации выборок, сильно отличающихся по объему, следует воспользоваться другими методами (например, критерием хи-квадрат).

§ 18.1. ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

На практике часто встречается ситуация, когда можно указать один фактор, влияющий на конечный результат, и этот фактор принимает конечное число значений. Такая ситуация может быть проанализирована при помощи *однофакторного дисперсионного анализа*.

Данные для однофакторного дисперсионного анализа — это k независимых выборок из k генеральных совокупностей. Однофакторный дисперсионный анализ сравнивает два источника вариации: между выборками (*межгрупповая вариация*) и внутри каждой выборки (*внутригрупповая вариация*). Каждая генеральная совокупность подчиняется нормальному распределению, причем все стандартные отклонения одинаковы.

Гипотеза H_0 утверждает, что все средние равны между собой. Альтернативная гипотеза H_1 говорит о том, что не все средние равны между собой (есть хотя бы две неравные средние).

Фактор A имеет k уровней. На каждом уровне проводится выборка объемом n_j ($j = 1, 2, ..., k$). Тогда общее число наблюдений равно $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Пусть x_{ij} ($i = 1, 2, ..., n_j$) — результаты j-й выборки. Отсюда $S = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - (\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij})^2/n$, $S_A = \sum_{j=1}^{k}(\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij})^2/n_j - (\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij})^2/n$, $S_0 = S - S_A$.

Статистика $F = \dfrac{S_A/(k-1)}{S_0/(n-k)}$. Доверительная вероятность p, $\alpha = 1 - p$.

По таблице F-распределения находим граничную точку $F_{\alpha;k-1;n-k}$. Если $F > F_{\alpha;k-1;n-k}$, то мы отклоняем гипотезу H_0 на уровне значимости α.

Пример 85. Предприятие решает вопрос о том, какую из трех систем контроля качества выбрать. Все три системы были тестированы. Результаты тестов были отражены в таблице.

Номер системы	Число выявленных бракованных изделий в партии продукции
1	1, 2, 3, 0, 2, 1
2	2, 3, 1, 0, 1
3	2, 2, 3, 2

Проверим гипотезу об отсутствии влияния различий между системами на результаты тестирования систем. Доверительная вероятность равна 95%. Предполагается, что выборки получены из независимых нормальных генеральных совокупностей с одной и той же генеральной дисперсией.

$p = 0,95 \Rightarrow \alpha = 1 - p = 1 - 0,95 = 0,05$.

H_0: различия между системами не влияют на результаты тестирования систем.

H_1: различия между системами влияют на результаты тестирования систем.

Заполним таблицу.

Номер системы	Число изделий x_{ij}	Сумма	n_j
1	1, 2, 3, 0, 2, 1	9	6
2	2, 3, 1, 0, 1	7	5
3	2, 2, 3, 2	9	4
Сумма	—	25	15

Поясним, как заполняется таблица. Сумму элементов в каждой строке 2-го столбца пишем в соответствующей строке 3-го столбца, а число элементов в каждой строке 2-го столбца — в соответствующей

строке 4-го столбца. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Тогда $S = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - (\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij})^2/n = 1^2 + 2^2 + ... + 3^2 + 2^2 - 25^2/15 \approx$ $\approx 13,33$.

$S_A = \sum_{j=1}^{k}(\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij})^2/n_j - (\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij})^2/n = 9^2/6 + 7^2/5 + 9^2/4 - 25^2/15 \approx 1,88$.

$S_0 = S - S_A = 13,33 - 1,88 = 11,45$.

Статистика $F = \dfrac{S_A/(k-1)}{S_0/(n-k)} = \dfrac{1,88/(3-1)}{11,45/(15-3)} \approx 0,99$.

По таблице F-распределения находим граничную точку $F_{\alpha;k-1;n-k} =$ $= F_{0,05;3-1;15-3} = 3,89 > 0,99 = F$.

Мы принимаем гипотезу на уровне значимости 5%. Различия между системами контроля не влияют на результаты тестирования систем.

Задача 70. Предприятие решает вопрос о том, какую из трех систем контроля качества выбирать. Все три системы были тестированы. Результаты тестов были отражены в таблице.

Номер системы	Число выявленных бракованных изделий в партии продукции
1	2, 1, 0, 3, 3, 1
2	3, 3, 2, 2, 1
3	2, 2, 2, 3

Проверить гипотезу об отсутствии влияния различий между системами на результаты тестирования систем. Доверительная вероятность равна 99%. Предполагается, что выборки получены из независимых нормальных генеральных совокупностей с одной и той же генеральной дисперсией.

Замечание. Excel позволяет провести однофакторный дисперсионный анализ. Воспользуемся надстройкой *Пакет анализа*.

Сервис → *Анализ данных* → *Однофакторный дисперсионный анализ* → *OK*. Откроется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Входной интервал* указывается ссылка на ячейки, содержащие исходные данные. В графе *Группирование* нужно указать, как сгруппированы данные (*по строкам*, *по столбцам*). Если первые из ячеек содержат пояснительный текст, то рядом со словом *Метки* нужно поставить «галочку». *Альфа* (уровень значимости) по умолчанию предполагается равным 0,05. Если исследователя это значение не устраивает, то рядом со словами *Альфа* нужно указать требуемое значение. Также указываются параметры вывода (*Выходной*

интервал, *Новый рабочий лист*, *Новая рабочая книга*). *OK.* Откроется итоговое окно.

В первой таблице для каждой выборки будут указаны ее объем (*Счет*), сумма элементов (*Сумма*), выборочное среднее (*Среднее*) и выборочная дисперсия (*Дисперсия*). Вторая таблица имеет следующий вид.

Источник вариации	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-значение*	*F критическое*
Между группами	S_A	$k-1$	$\frac{S_A}{k-1}$	$\frac{S_A/(k-1)}{S_0/(n-k)}$		$F_{\alpha;k-1;n-k}$
Внутри групп	S_0	$n-k$	$\frac{S_0}{n-k}$			
Итого	S	$n-1$				

Если *P-значение* меньше *Альфа* (то есть $F > F$ *критическое*), то гипотеза H_0 отвергается.

§ 18.2. ДВУХФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Рассмотрим влияние двух факторов A и B на конечный результат. Здесь дисперсионный анализ основывается на результатах эксперимента, проводимого на различных уровнях каждого из факторов. Все предположения § 18.1 остаются в силе.

Считаем, что взаимосвязь факторов отсутствует. Для простоты ограничимся случаем, когда для каждой пары уровней рассматриваемых факторов проводится по одному наблюдению (*двухфакторный дисперсионный анализ без повторений*).

Пусть n_A — число уровней фактора A, n_B — число уровней фактора B. Тогда общее число наблюдений для всех возможных пар уровней факторов A и B равно $n = n_A n_B$.

Гипотеза H_0^A утверждает, что фактор A не влияет на конечный результат.

Гипотеза H_0^B утверждает, что фактор B не влияет на конечный результат.

Пусть x_{ij} — результат наблюдения при i-м уровне фактора A и j-м уровне фактора B.

Введем следующие обозначения:

$$\overline{x} = \frac{1}{n_A n_B}\sum_{i=1}^{n_A}\sum_{j=1}^{n_B} x_{ij},\ \overline{x}_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n_B} x_{ij}/n_B,\ \overline{x}_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n_A} x_{ij}/n_A,$$

$$S_A = n_B \sum_{i=1}^{n_A} (\overline{x}_{i\bullet} - \overline{x})^2, \ S_B = n_A \sum_{j=1}^{n_B} (\overline{x}_{\bullet j} - \overline{x})^2,$$

$$S = \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{j=1}^{n_B} (x_{ij} - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{j=1}^{n_B} x_{ij}^2 - n_A n_B (\overline{x})^2, \ S_0 = S - S_A - S_B.$$

Статистика $F_A = S_A(n_B - 1)/S_0$. Статистика $F_B = S_B(n_A - 1)/S_0$.

Доверительная вероятность p, $\alpha = 1 - p$. По таблице F-распределения находим граничные точки $F_{\alpha;n_A-1;(n_A-1)(n_B-1)}$ (для H_0^A) и $F_{\alpha;n_B-1;(n_A-1)(n_B-1)}$ (для H_0^B).

Если $F_A > F_{\alpha;n_A-1;(n_A-1)(n_B-1)}$, то мы отклоняем гипотезу H_0^A на уровне значимости α.

Если $F_B > F_{\alpha;n_B-1;(n_A-1)(n_B-1)}$, то мы отклоняем гипотезу H_0^B на уровне значимости α.

Пример 86. Таблица содержит результаты наблюдений за влиянием факторов A и B на конечный результат.

Уровни фактора А	Уровни фактора В			
	1	2	3	4
1	3	7	6	8
2	4	2	5	7
3	6	3	4	3

Оказывает ли влияние фактор A на конечный результат? Оказывает ли влияние фактор B на конечный результат? Доверительная вероятность равна 95%.

Заполним таблицу.

Уровни фактора А	Уровни фактора В				Сумма	$\overline{x}_{i\bullet}$
	1	2	3	4		
1	3	7	6	8	24	6
2	4	2	5	7	18	4,5
3	6	3	4	3	16	4
Сумма	13	12	15	18	58	
$\overline{x}_{\bullet j}$	4,33	4	5	6		

Поясним, как заполняется таблица.

В предпоследней строке указана сумма чисел соответствующего столбца. В предпоследнем столбце указана сумма чисел соответствующей строки.

Разделив эти суммы на число слагаемых и округлив результаты до двух цифр после запятой, мы получим последние строку и столбец.

Здесь число уровней фактора A равно $n_A = 3$, а число уровней фактора B равно $n_B = 4$.

$\overline{x} = \frac{1}{n_A n_B} \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{j=1}^{n_B} x_{ij} = 58/(3 \times 4) \approx 4{,}83.$

$S_A = n_B \sum_{i=1}^{n_A} (\overline{x}_{i\bullet} - \overline{x})^2 = 4((6 - 4{,}83)^2 + (4{,}5 - 4{,}83)^2 + (4 - 4{,}83)^2) \approx 8{,}67.$

$S_B = n_A \sum_{j=1}^{n_B} (\overline{x}_{\bullet j} - \overline{x})^2 = 3((4{,}33 - 4{,}83)^2 + (4 - 4{,}83)^2 + (5 - 4{,}83)^2 +$
$+ (6 - 4{,}83)^2) \approx 7{,}01.$

$S = \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{j=1}^{n_B} x_{ij}^2 - n_A n_B (\overline{x})^2 = 3^2 + 7^2 + ... + 4^2 + 3^2 - 3 \times 4 \times 4{,}83^2 \approx 42{,}05.$

$S_0 = S - S_A - S_B = 42{,}05 - 8{,}67 - 7{,}01 = 26{,}37.$

H_0^A: фактор A не влияет на конечный результат.

H_1^A: фактор A влияет на конечный результат.

H_0^B утверждает, что фактор B не влияет на конечный результат.

H_1^B утверждает, что фактор B влияет на конечный результат.

Доверительная вероятность $p = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05.$

Статистика $F_A = S_A(n_B - 1)/S_0 = 8{,}67(4 - 1)/26{,}37 \approx 0{,}99.$

По таблице F-распределения находим граничную точку $F_{\alpha; n_A - 1; (n_A - 1)(n_B - 1)} = F_{0{,}05; 3-1; (3-1)(4-1)} = 5{,}14 > F_A = 0{,}99.$

Мы принимаем гипотезу H_0^A на уровне значимости 5%, то есть фактор A не влияет на конечный результат.

Статистика $F_B = S_B(n_A - 1)/S_0 = 7{,}01(3 - 1)/26{,}37 \approx 0{,}53.$

По таблице F-распределения находим граничную точку $F_{\alpha; n_B - 1; (n_A - 1)(n_B - 1)} = F_{0{,}05; 4-1; (3-1)(4-1)} = 4{,}76 > F_B = 0{,}53.$

Мы принимаем гипотезу H_0^B на уровне значимости 5%, то есть фактор B не влияет на конечный результат.

Задача 71. Таблица содержит результаты наблюдений за влиянием факторов A и B на конечный результат.

Уровни фактора A	Уровни фактора B			
	1	2	3	4
1	2	6	5	7
2	5	3	6	8
3	6	2	2	3

Оказывает ли влияние фактор A на конечный результат? Оказывает ли влияние фактор B на конечный результат? Доверительная вероятность равна 99%.

Замечание. Excel позволяет провести двухфакторный дисперсионный анализ без повторений. Воспользуемся надстройкой *Пакет анализа.*

Сервис → Анализ данных → Двухфакторный дисперсионный анализ без повторений → OK. Откроется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *OK.* Откроется итоговое окно.

Если для соответствующего источника вариации (строки или столбцы) *P-значение* меньше *Альфа* (то есть $F > F$ *критическое*), то соответствующая гипотеза H_0 отвергается.

Excel позволяет также провести двухфакторный дисперсионный анализ с повторениями. *Сервис → Анализ данных → Двухфакторный дисперсионный анализ с повторениями → OK.* Откроется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Число строк для выборки* нужно указать число повторений. *OK.* Откроется итоговое окно.

Глава 19

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ

§ 19.1. λ-КРИТЕРИЙ КОЛМОГОРОВА-СМИРНОВА

λ-критерий Колмогорова-Смирнова применяется для проверки гипотезы о распределении непрерывной случайной величины. При его использовании сравниваются эмпирическая $F_э(x)$ и предполагаемая $F(x)$ функции распределения.

Алгоритм проведения проверки:

1. Производится выборка объемом $n \geqslant 50$.
2. Находим эмпирическую функцию распределения $F_э(x)$.
3. По данным выборки x_i для предполагаемой функции распределения $F(x)$ определим $F(x_i)$.
4. Вычислим значение статистики: $\lambda = \max\limits_{x_i} |F(x_i) - F_э(x_i)|\sqrt{n}$.
5. По уровню значимости α из специальной таблицы находим граничную точку λ_α.

α	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
λ_α	1,073	1,224	1,358	1,520	1,627	1,950

6. Если $\lambda < \lambda_\alpha$, то различия между эмпирическим и предполагаемым теоретическим распределениями несущественны. Если $\lambda > \lambda_\alpha$, то различия между эмпирическим и предполагаемым теоретическим распределениями существенны.

Пример 87. Респондентам был задан вопрос о том, сколько порций мороженого они съедают за неделю. Результаты опроса приведены в следующей таблице.

Число порций	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота	10	11	8	9	12	10	13	15	12

Определим с помощью λ-критерия Колмогорова-Смирнова на уровне значимости $\alpha = 0,05$, согласуются ли данные выборки с равномерным распределением на отрезке [0, 10].

H_0: различия между эмпирическим и предполагаемым теоретическим распределениями несущественны, то есть нет никаких предпочтений.

H_1: различия между эмпирическим и предполагаемым теоретическим распределениями существенны, то есть предпочтения имеются.

Функция распределения случайной величины, равномерно распределенной на отрезке [0, 10], имеет следующий вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0, \\ x/10, 0 < x \leqslant 10, \\ 1, x > 10. \end{cases}$$

Заполним таблицу.

x_i	n_i	n_i/n	$F_э(x_i)$	$F(x_i) = 0,1x_i$	$\|F(x_i) - F_э(x_i)\|$
1	10	0,10	0,10	0,1	0
2	11	0,11	0,21	0,2	0,01
3	8	0,08	0,29	0,3	0,01
4	9	0,09	0,38	0,4	0,02
5	12	0,12	0,50	0,5	0
6	10	0,10	0,60	0,6	0
7	13	0,13	0,73	0,7	0,03
8	15	0,15	0,88	0,8	0,08
9	12	0,12	1,00	0,9	0,1
Сумма	$n = 100$	—	—	—	—

Поясним, как заполняется таблица. Значения первых двух столбцов взяты из условия. В последней строке указана сумма чисел 2-го столбца. Каждое число 2-го столбца делим на $n = 100$ и результат пишем в 3-м столбце. Каждое число 4-го столбца равно сумме числа из этой же строки 3-го столбца и предыдущего числа 4-го столбца. Каждое число 1-го столбца подставляем в формулу $F(x_i) = 0,1x_i$ и результат пишем в 5-м столбце. 6-й столбец — это модуль разности 4-го и 5-го столбцов.

Определим наибольшее число в последнем столбце:
$\max\limits_{x_i} |F(x_i) - F_э(x_i)| = 0,1.$

Тогда статистика $\lambda = \max\limits_{x_i} |F(x_i) - F_э(x_i)|\sqrt{n} = 0,1\sqrt{100} = 1.$

По уровню значимости $\alpha = 0,05$ из специальной таблицы находим граничную точку $\lambda_\alpha = 1,358$.

Так как $\lambda < \lambda_\alpha$ ($1 < 1,358$), то мы принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости $\alpha = 0,05$. Данные выборки согласуются с равномерным распределением на отрезке [0, 10], то есть нет никаких предпочтений.

Задача 72. Респондентам был задан вопрос о том, сколько порций мороженого они съедают за неделю. Результаты опроса приведены в следующей таблице.

Число порций	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота	13	15	12	11	8	9	12	10	10

Определить с помощью λ-критерия Колмогорова-Смирнова на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, согласуются ли данные выборки с равномерным распределением на отрезке [0, 10].

Если имеются две случайные выборки объемами n_1 и n_2 ($n_1 \geqslant 50$, $n_2 \geqslant 50$), то с помощью λ-критерия Колмогорова-Смирнова можно проверить гипотезу H_0: две выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности с предполагаемой функцией распределения $F(x)$. В этом случае статистика $\lambda = \max\limits_{x_i} |F_{1э}(x_i) - F_{2э}(x_i)| \sqrt{n}$, где $n = n_1 n_2/(n_1 + n_2)$, $F_{1э}(x_i)$ и $F_{2э}(x_i)$ — эмпирические функции распределения, построенные по данным соответственно первой и второй выборок.

Пример 88. В двух выборках был задан вопрос о том, сколько порций мороженого респонденты съедают в неделю. Результаты опросов приведены в таблице.

Число порций	Частота (выборка 1)	Частота (выборка 2)
0–10	2	4
10–20	11	13
20–30	14	7
30–40	18	23
40–50	13	11
50–60	6	9
60–70	23	18
70–80	14	8
80–90	6	6

На уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверим гипотезу о том, что обе выборки принадлежат одной и той же целевой популяции любителей мороженого (то есть число съеденных порций мороженого в выборках определяется одной и той же функцией распределения).

H_0: число съеденных порций мороженого в выборках определяется одной и той же функцией распределения.

Заполним таблицу.

Поясним, как заполняется таблица. Значения первых трех столбцов взяты из условия. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца. Каждое число 2-го (3-го) столбца делим на $n_1 = 107$ ($n_2 = 99$), результат округляем до трех цифр после запятой и пишем в 4-м (6-м) столбце. Каждое число 5-го (7-го) столбца равно сумме числа из этой же строки 4-го (6-го) столбца и предыдущего чис-

x_i	n_{1i}	n_{2i}	n_{1i}/n_1	$F_{1э}(x_i)$	n_{2i}/n_2	$F_{2э}(x_i)$	$\lvert F_{1э}(x_i)-F_{2э}(x_i)\rvert$
0–10	2	4	0,019	0,019	0,040	0,040	0,021
10–20	11	13	0,103	0,122	0,131	0,171	0,049
20–30	14	7	0,131	0,253	0,071	0,242	0,011
30–40	18	23	0,168	0,421	0,232	0,474	0,053
40–50	13	11	0,121	0,542	0,111	0,585	0,043
50–60	6	9	0,056	0,598	0,091	0,676	0,078
60–70	23	18	0,215	0,813	0,182	0,858	0,045
70–80	14	8	0,131	0,944	0,081	0,939	0,005
80–90	6	6	0,056	1,000	0,061	1,000	0
Сумма	$n_1 = 107$	$n_2 = 99$	—	—	—	—	—

ла 5-го (7-го) столбца. 8-й столбец — это модуль разности 5-го и 7-го столбцов.

Определим наибольшее число в последнем столбце: $\max\limits_{x_i}|F_{1э}(x_i) - F_{2э}(x_i)| = 0{,}078$.

Так как $n = n_1n_2/(n_1 + n_2) = 107{\times}99/(107 + 99) \approx 51{,}422$, то статистика $\lambda = \max\limits_{x_i}|F_{1э}(x_i) - F_{2э}(x_i)|\sqrt{n} = 0{,}078\sqrt{51{,}422} \approx 0{,}559$.

По уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ из специальной таблицы находим граничную точку $\lambda_\alpha = 1{,}358$.

Так как $\lambda < \lambda_\alpha$ $(0{,}559 < 1{,}358)$, то мы принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Число съеденных порций мороженого определяется одной и той же функцией распределения.

Задача 73. В двух выборках был задан вопрос о том, сколько порций мороженого респонденты съедают в неделю. Результаты опросов приведены в таблице.

Число порций	Частота (выборка 1)	Частота (выборка 2)
0–10	3	5
10–20	12	14
20–30	13	6
30–40	19	24
40–50	12	10
50–60	5	10
60–70	22	16
70–80	15	11
80–90	7	7

На уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о том, что обе выборки принадлежат одной и той же целевой популяции любителей мороженого (то есть число съеденных порций мороженого в выборках определяется одной и той же функцией распределения).

§ 19.2. Q-КРИТЕРИЙ РОЗЕНБАУМА

Q-критерий Розенбаума используется для оценки различий между двумя выборками по уровню количественно измеренного признака.

Производятся две выборки объемами n_1 и n_2 ($n_1 \geqslant 11$, $n_2 \geqslant 11$). Обе выборки упорядочиваются по убыванию. Первой выборкой будем считать ту, где значения больше.

H_0: уровень признака в 1-й выборке не превышает уровень признака во 2-й выборке.

H_1: уровень признака в 1-й выборке превышает уровень признака во 2-й выборке.

Обозначим через S_1 (S_2) разность между наибольшими (наименьшими) значениями выборок.

Тогда статистика $Q = S_1 + S_2$.

Задается уровень значимости α. Из специальной таблицы по α, n_1 и n_2 определяется граничная точка $Q_{кр}$.

Если $Q > Q_{кр}$, то гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α. Если $Q < Q_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

Пример 89. Две группы студентов были протестированы. Тест содержал 50 вопросов. В таблице указано число правильных ответов каждого участника теста.

Группа 1	Группа 2
45	43
40	42
44	44
38	37
42	35
42	39
39	39
44	40
43	40
41	41
41	35
38	—

Можно ли утверждать, что первая группа превзошла вторую группу по результатам теста? Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Упорядочим обе выборки по убыванию.

Группа 1	Группа 2
45	44
44	43
44	42
43	41
42	40
42	40
41	39
41	39
40	37
39	35
38	35
38	—

Тогда $S_1 = 45 - 44 = 1$, $S_2 = 38 - 35 = 3$.

H_0: первая группа не превзошла вторую группу по результатам теста.

H_1: первая группа превзошла вторую группу по результатам теста.

Статистика $Q = S_1 + S_2 = 1 + 3 = 4$. Из специальной таблицы по $\alpha = 0,05$; $n_1 = 12$ и $n_2 = 11$ находим граничную точку $Q_{кр} = 6$. Так как $Q < Q_{кр}$ $(4 < 6)$, то гипотеза принимается на уровне значимости $\alpha = 0,05$. Первая группа не превзошла вторую группу по результатам теста.

Задача 74. Две группы студентов были протестированы. Тест содержал 50 вопросов. В таблице указано число правильных ответов каждого участника теста.

Группа 1	Группа 2
47	44
46	45
42	44
43	44
44	43
44	42
46	40
40	35
41	33
42	39
38	39
39	—

Можно ли утверждать, что первая группа превзошла вторую группу по результатам теста? Уровень значимости $\alpha = 0,05$.

§ 19.3. U-КРИТЕРИЙ МАННА-УИТНИ

U-критерий Манна-Уитни используется для оценки различий между двумя выборками по уровню количественно измеренного признака.

Производятся две малые выборки объемами n_1 и n_2 соответственно ($n_1 \geqslant 3$, $n_2 \geqslant 3$ или $n_1 = 2$, $n_2 \geqslant 5$). Первой выборкой будем считать ту, где значения больше.

H_0: уровень признака во 2-й выборке не ниже уровня признака в 1-й выборке.

H_1: уровень признака во 2-й выборке ниже уровня признака в 1-й выборке.

Обе выборки объединяются в одну. Эта объединенная выборка ранжируется по возрастанию, то есть меньшему значению приписывается меньший ранг.

В случае, когда несколько значений равны, им приписывается ранг, равный среднему значению из тех рангов, который они получили бы, если бы не были равны.

Подсчитывается сумма рангов для элементов каждой выборки. Обозначим большую из этих ранговых сумм через T_x, а объем соответствующей выборки — через n_x.

Тогда статистика $U = n_1 n_2 + 0{,}5 n_x(n_x + 1) - T_x$.

Задается уровень значимости α. Из специальной таблицы по α, n_1 и n_2 определяется граничная точка $U_{кр}$.

Если $U > U_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α. Если $U < U_{кр}$, то гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α.

Пример 90. Две группы студентов были протестированы. Тест содержал 50 вопросов. В таблице указано число правильных ответов каждого участника теста.

Группа 1	Группа 2
45	44
40	43
44	40
38	37
—	36

Можно ли утверждать, что одна из групп превзошла другую группу по результатам теста? Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Обе выборки объединяются в одну, которая ранжируется по возрастанию. Заполним таблицу.

Группа 1	Ранг	Группа 2	Ранг
		36	1
		37	2
38	3		
40	4,5	40	4,5
		43	6
44	7,5	44	7,5
45	9		
Сумма	24	—	21

Поясним, как заполняется таблица.

Числу 36 припишем ранг 1. Числу 37 припишем ранг 2. Числу 38 припишем ранг 3. Числам 40 припишем ранг $(4 + 5)/2 = 4{,}5$. И т. д. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

H_0: результаты теста группы 2 не хуже результатов теста группы 1.

H_1: результаты теста группы 2 хуже результатов теста группы 1.

Так как $24 > 21$, то $T_x = 24$, $n_x = n_1 = 4$. Тогда статистика $U = n_1 n_2 + 0{,}5 n_x(n_x + 1) - T_x = 4 \times 5 + 0{,}5 \times 4 \times (4 + 1) - 24 = 6$.

Из специальной таблицы по $\alpha = 0{,}05$; $n_1 = 4$ и $n_2 = 5$ находим граничную точку $U_{кр} = 2$.

Так как $U > U_{кр}$ $(6 > 2)$, то гипотеза H_0 принимается на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Результаты теста группы 2 не хуже результатов теста группы 1.

Задача 75. Две группы студентов были протестированы. Тест содержал 50 вопросов. В таблице указано число правильных ответов каждого участника теста.

Группа 1	Группа 2
46	45
38	41
41	42
42	34
—	35

Можно ли утверждать, что одна из групп превзошла другую группу по результатам теста? Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

§ 19.4. H-КРИТЕРИЙ КРУСКАЛА-УОЛЛИСА

H-критерий Крускала-Уоллиса является обобщением U-критерия Манна-Уитни на случай k выборок $(k \geqslant 3)$.

H_0: между выборками существуют лишь случайные различия по уровню исследуемого признака.

H_1: между выборками существуют неслучайные различия по уровню исследуемого признака.

Все выборки объединяются в одну. Эта объединенная выборка объема n ранжируется по возрастанию, то есть меньшему значению приписывается меньший ранг. В случае, когда несколько значений равны, им приписывается ранг, равный среднему значению из тех рангов, который они получили бы, если бы не были равны.

Подсчитывается сумма рангов T_i ($i = 1, ..., k$) для элементов каждой выборки.

Тогда статистика $H = \dfrac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} T_i^2/n_i - 3(n+1)$.

Задается уровень значимости α. В случае $n_i \geqslant 5$ и $k \geqslant 4$ граничная точка $H_{кр} = \chi^2_{1-\alpha;k-1}$ определяется по таблице χ^2-распределения. Для небольших n_i и k существуют специальные таблицы граничных точек $H_{кр}$.

Если $H > H_{кр}$, то гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α. Если $H < H_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

Пример 91. Три группы студентов были протестированы. Тест содержал 50 вопросов. В таблице указано число правильных ответов каждого участника теста.

Группа 1	Группа 2	Группа 3
45	44	42
40	43	42
44	40	41
38	—	—

Можно ли утверждать, что между группами существуют лишь случайные различия по результатам теста? Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

H_0: между группами существуют лишь случайные различия по результатам теста.

H_1: между группами существуют неслучайные различия по результатам теста.

Здесь $k = 3$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 3$, $n = n_1 + n_2 + n_3 = 4 + 3 + 3 = 10$.

Все выборки объединяются в одну, которая ранжируется по возрастанию. Заполним таблицу.

Группа 1	Ранг	Группа 2	Ранг	Группа 3	Ранг
38	1				
40	2,5	40	2,5		
				41	4
				42	5,5
				42	5,5

Группа 1	Ранг	Группа 2	Ранг	Группа 3	Ранг
		43	7		
44	8,5	44	8,5		
45	10				
Сумма	$T_1 = 22$	—	$T_2 = 18$	—	$T_3 = 15$

Поясним, как заполняется таблица.

Числу 38 припишем ранг 1. Числам 40 припишем ранг $(2 + 3)/2 = 2{,}5$. И т. д.

В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Тогда статистика $H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} T_i^2/n_i - 3(n+1) = \frac{12}{10(10+1)} \times (22^2/4 + 18^2/3 + 15^2/3) - 3(10+1) \approx 0{,}1636$.

Из специальной таблицы по $\alpha = 0{,}05$; $n_1 = 4$, $n_2 = 3$ и $n_3 = 3$ находим граничную точку $H_{кр} = 5{,}7273$.

Так как $H < H_{кр}$ $(0{,}1636 < 5{,}7273)$, то гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α. Между группами существуют лишь случайные различия по результатам теста.

Задача 76. Три группы студентов были протестированы. Тест содержал 50 вопросов. В таблице указано число правильных ответов каждого участника теста.

Группа 1	Группа 2	Группа 3
46	45	39
38	41	40
41	42	40
42	—	—

Можно ли утверждать, что между группами существуют лишь случайные различия по результатам теста? Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

§ 19.5. S-КРИТЕРИЙ ДЖОНКИРА

S-критерий Джонкира предназначен для выявления тенденций изменения признака при переходе от выборки к выборке при сопоставлении k выборок. В каждой из сопоставляемых выборок должно быть одинаковое число наблюдений n.

Все выборки выстраиваются слева направо в порядке возрастания суммы значений выборки.

H_0: тенденция возрастания значений при переходе от выборки к выборке является случайной.

H_1: тенденция возрастания значений при переходе от выборки к выборке не является случайной.

Для каждого индивидуального значения определяется число значений справа, превосходящих его по величине. Обозначим сумму всех таких чисел через A.

Пусть $B = 0{,}5k(k-1)n^2$. Тогда статистика $S = 2A - B$.

Задается уровень значимости α. Из специальной таблицы по α, k и n определяется граничная точка $S_{кр}$. Если $S > S_{кр}$, то гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α. Если $S < S_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

Пример 92. Студенты 1-го, 2-го и 3-го курсов были протестированы. Тест содержал 50 вопросов. В таблице указано число правильных ответов каждого участника теста.

Курс 1	Курс 2	Курс 3
31	35	41
33	35	40
32	39	44
34	37	44
35	40	42

Можно ли считать, что увеличение числа правильных ответов при переходе от курса к курсу является случайным? Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

H_0: увеличение числа правильных ответов при переходе от курса к курсу является случайным.

H_1: увеличение числа правильных ответов при переходе от курса к курсу не является случайным.

Здесь $k = 3$, $n = 5$. Все выборки выстраиваются слева направо в порядке возрастания суммы значений выборки. Для каждого индивидуального значения определяется число значений справа, превосходящих его по величине. Заполним таблицу.

Курс 1	S_1	Курс 2	S_2	Курс 3
31	10	35	5	40
32	10	35	5	41
33	10	37	5	42
34	10	39	5	44
35	8	40	4	44
165	48	186	24	211

Поясним, как заполняется таблица. Числа 1-го, 3-го и 5-го столбцов взяты из условия. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца. Так как 165 < 186 < 211, то сначала анализиру-

ются результаты 1-го курса, затем результаты 2-го курса и потом результаты 3-го курса. Любое из чисел 3-го и 5-го столбцов (всего их 10) превосходит число 31 из 1-го столбца. Поэтому напротив 31 во 2-м столбце пишем 10. Любое из чисел 3-го и 5-го столбцов (всего их 10) превосходит число 32 из 1-го столбца. Поэтому напротив 32 во 2-м столбце пишем 10. И т. д.

Например, напротив числа 40 из 3-го столбца в 4-м столбце пишем 4, так как 4 числа из 5-го столбца (41, 42, 44, 44) превосходят 40. Получаем, что $A = 48 + 24 = 72$, $B = 0{,}5k(k-1)n^2 = 0{,}5\times3(3-1)5^2 = 75$.

Тогда статистика $S = 2A - B = 2\times72 - 75 = 69$.

Из специальной таблицы по $\alpha = 0{,}05$; $k = 3$ и $n = 5$ находим граничную точку $S_{кр} = 33$. Так как $S > S_{кр}$ (69 > 33), то гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Увеличение числа правильных ответов при переходе от курса к курсу не является случайным.

Задача 77. Студенты 1-го, 2-го и 3-го курсов были протестированы. Тест содержал 50 вопросов. В таблице указано число правильных ответов каждого участника теста.

Курс 1	Курс 2	Курс 3
32	35	42
34	35	47
33	39	46
35	40	41
35	41	43

Можно ли считать, что увеличение числа правильных ответов при переходе от курса к курсу является случайным? Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

§ 19.6. G-КРИТЕРИЙ ЗНАКОВ

G-критерий знаков предназначен для установления общего направления сдвига исследуемого признака.

H_0: преобладание типичного направления сдвига является случайным.

H_1: преобладание типичного направления сдвига не является случайным.

На объем выборки n налагается следующее условие: $5 \leqslant n \leqslant 300$.

Для двух выборок объема *n нулевые реакции* (то есть неизменные значения) исключаются из рассмотрения. *Типичные сдвиги* — это изменения в преобладающем направлении. Тогда статистика G равна числу нетипичных сдвигов.

Задается уровень значимости α. Из специальной таблицы по α и n определяется граничная точка $G_{кр}$.

Если $G > G_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α. Если $G < G_{кр}$, то гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α.

Пример 93. В таблице указаны места спортсмена на этапах кубка мира, завоеванные под руководством разных тренеров.

Тренер *A*	2	5	6	9	7
Тренер *B*	3	4	4	6	5

Определим, повлияла ли отставка тренера на выступление спортсмена. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Здесь $n = 5$. Мы видим, что типичные сдвиги — это улучшение результатов.

H_0: улучшение результатов выступления после отставки тренера является случайным.

H_1: улучшение результатов выступления после отставки тренера не является случайным.

Один из сдвигов нетипичный (3 вместо 2). Поэтому статистика $G = 1$.

Из специальной таблицы по $\alpha = 0{,}05$ и $n = 5$ находим граничную точку $G_{кр} = 0$.

Так как $G > G_{кр}$ $(1 > 0)$, то гипотеза H_0 принимается на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Улучшение результатов выступления после отставки тренера является случайным.

Задача 78. В таблице указаны места спортсмена на этапах кубка мира, завоеванные под руководством разных тренеров.

Тренер *A*	3	4	7	10	11
Тренер *B*	5	3	2	6	7

Определить, повлияла ли отставка тренера на выступление спортсмена. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

§ 19.7. T-КРИТЕРИЙ ВИЛКОКСОНА

Т-критерий Вилкоксона применяется для сопоставления показателей, измеренных в двух разных условиях на одной и той же выборке испытуемых. С его помощью можно определить, является ли сдвиг показателей в каком-то одном направлении более интенсивным, чем в другом.

H_0: интенсивность сдвигов в типичном направлении не превосходит интенсивности сдвигов в нетипичном направлении.

H_1: интенсивность сдвигов в типичном направлении превосходит интенсивность сдвигов в нетипичном направлении.

На объем выборки n налагается следующее условие: $5 \leqslant n \leqslant 50$.

Определяется разность между соответствующими значениями выборок. Модули этих разностей ранжируются в порядке возрастания, то есть меньшему значению приписывается меньший ранг. Подсчитывается сумма рангов для сдвигов в нетипичном направлении. Это статистика T.

Задается уровень значимости α. Из специальной таблицы по α и n определяется граничная точка $T_{кр}$. Если $T > T_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α. Если $T < T_{кр}$, то гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α.

Пример 94. Ответим на вопрос примера 93 с помощью T-критерия Вилкоксона.

H_0: интенсивность сдвигов в сторону улучшения результатов не превосходит интенсивности сдвигов в сторону ухудшения результатов.

H_1: интенсивность сдвигов в сторону улучшения результатов превосходит интенсивность сдвигов в сторону ухудшения результатов.

Заполним таблицу.

Тренер А	Тренер В	d	$\|d\|$	Ранг
2	3	−1	1	1,5
5	4	1	1	1,5
6	4	2	2	3,5
9	6	3	3	5
7	5	2	2	3,5

Поясним, как заполняется таблица. Значения первых двух столбцов взяты из условия.

3-й столбец — это разность первых двух столбцов. 4-й столбец — это модули чисел 3-го столбца. В 5-м столбце указаны ранги чисел 4-го столбца.

Сдвиги в нетипичном направлении в этом примере — это сдвиги, которым в 3-м столбце соответствуют отрицательные числа. Их сумма рангов равна 1,5. Это статистика T, то есть $T = 1{,}5$.

Из специальной таблицы по $\alpha = 0{,}05$ и $n = 5$ находим граничную точку $T_{кр} = 0$. Так как $T > T_{кр}$ $(1{,}5 > 0)$, то гипотеза H_0 принимается на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Интенсивность сдвигов в сторону улучшения результатов не превосходит интенсивности сдвигов в сторону ухудшения результатов.

Задача 79. Ответить на вопрос задачи 78 с помощью T-критерия Вилкоксона.

§ 19.8. χ_r^2-КРИТЕРИЙ ФРИДМАНА

χ_r^2-критерий Фридмана применяется для сопоставления показателей, измеренных в *c* условиях ($c \geqslant 3$) на одной и той же выборке из *n* испытуемых.

χ_r^2-критерий Фридмана позволяет установить, что величины показателей от условия к условию изменяются, но при этом не указывает на направление изменений.

H_0: между показателями, полученными в разных условиях, существуют лишь случайные различия.

H_1: между показателями, полученными в разных условиях, существуют неслучайные различия.

Для каждого испытуемого проранжируем его значения, полученные в разных условиях, по возрастанию, то есть меньшему значению приписывается меньший ранг. В случае, когда несколько значений равны, им приписывается ранг, равный среднему значению из тех рангов, который они получили бы, если бы не были равны.

Подсчитывается сумма рангов T_i ($i = 1, ..., c$) для соответствующего условия. Тогда статистика $\chi_r^2 = \dfrac{12}{n \times c(c+1)} \sum_{i=1}^{c} T_i^2 - 3n(c+1)$.

Задается уровень значимости α. Из специальных таблиц по $\alpha = 0{,}05$, $c = 3$, $n \leqslant 9$ или по $\alpha = 0{,}05$; $c = 4$, $n \leqslant 5$ определяется граничная точка $\chi_{r,\text{кр}}^2$.

При большем количестве условий *c* или испытуемых *n* граничная точка $\chi_{r,\text{кр}}^2 = \chi_{1-\alpha;c-1}^2$ определяется по таблице χ^2-распределения.

Если $\chi_r^2 > \chi_{r,\text{кр}}^2$, то гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α. Если $\chi_r^2 < \chi_{r,\text{кр}}^2$, то гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

Пример 95. $c = 3$ эксперта оценивают $n = 6$ товаров. Результаты экспертизы приведены в таблице.

Товар	Эксперт M	Эксперт N	Эксперт Q
A	3	5	1
B	2	1	3
C	1	6	5
D	4	3	2
E	5	4	6
F	6	2	4

Определим, случайны ли различия между результатами экспертизы. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

H_0: между результатами экспертизы существуют лишь случайные различия.

H_1: между результатами экспертизы существуют неслучайные различия.

Заполним таблицу.

Товар	M	Ранг	N	Ранг	Q	Ранг
A	3	2	5	3	1	1
B	2	2	1	1	3	3
C	1	1	6	3	5	2
D	4	3	3	2	2	1
E	5	2	4	1	6	3
F	6	3	2	1	4	2
Сумма	—	T_1=13	—	T_2=11	—	T_3=12

Поясним, как заполняется таблица. Значения 1-го, 2-го, 4-го и 6-го столбцов взяты из условия. Для каждого товара проранжируем его оценки, полученные у различных экспертов, и соответствующие ранги запишем в 3-й, 5-й и 7-й столбцы. Например, для товара *A* наивысшая оценка (5) получена у эксперта *N*. Поэтому соответствующий ранг в 5-м столбце равен 3. Наименьшая же оценка товара *A* (1) получена у эксперта *Q*. Поэтому соответствующий ранг в 7-м столбце равен 1. Следовательно, ранг в 3-м столбце для товара *A* равен 2.

В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Статистика $\chi_r^2 = \frac{12}{n \times c(c+1)} \sum_{i=1}^{c} T_i^2 - 3n(c+1) = \frac{12}{6 \times 3(3+1)}(13^2 +$
$+ 11^2 + 12^2) - 3 \times 6(3+1) \approx 0,33$.

Из специальных таблиц по $\alpha = 0,05$; $c = 3$, $n = 6$ находнм граничную точку $\chi^2_{r,\text{кр}} = 6,33$.

Так как $\chi_r^2 < \chi^2_{r,\text{кр}}$ (0,33 < 6,33), то гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

Между результатами экспертизы существуют лишь случайные различия.

Задача 80. $c = 3$ эксперта оценивают $n = 6$ товаров. Результаты экспертизы приведены в таблице.

Товар	Эксперт M	Эксперт N	Эксперт Q
A	4	3	5
B	2	1	3
C	1	2	4
D	5	4	6
E	6	5	1
F	3	6	2

Определить, случайны ли различия между результатами экспертизы. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

§ 19.9. L-КРИТЕРИЙ ТЕНДЕНЦИЙ ПЕЙДЖА

L-критерий тенденций Пейджа применяется для сопоставления показателей, измеренных в c условиях ($3 \leqslant c \leqslant 6$) на одной и той же выборке из n испытуемых ($n \leqslant 12$). Он не только констатирует различия, но и указывает на направление изменений.

Для каждого испытуемого проранжируем его значения, полученные в разных условиях, по возрастанию, то есть меньшему значению приписывается меньший ранг. В случае, когда несколько значений равны, им приписывается ранг, равный среднему значению из тех рангов, который они получили бы, если бы не были равны.

Подсчитывается сумма рангов T_i ($i = 1, ..., c$) для соответствующего условия. После этого все условия располагаются в порядке возрастания суммы рангов.

H_0: увеличение индивидуальных показателей при переходе от условия к условию является случайным.

H_1: увеличение индивидуальных показателей при переходе от условия к условию не является случайным.

Статистика $L = \sum_{i=1}^{c} iT_i$.

Задается уровень значимости α. Из специальных таблиц по α, c и n определяется граничная точка $L_{кр}$.

Если $L > L_{кр}$, то гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α. Если $L < L_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

Пример 96. Ответим на вопрос примера 95 с помощью L-критерия Пейджа.

Расположим все условия в порядке возрастания суммы рангов: $N (T_2 = 11)$, $Q (T_3 = 12)$, $M (T_1 = 13)$.

H_0: увеличение индивидуальных показателей при переходе от условия к условию является случайным.

H_1: увеличение индивидуальных показателей при переходе от условия к условию не является случайным.

Статистика $L = \sum_{i=1}^{c} iT_i = 1\times11 + 2\times12 + 3\times13 = 74$.

Из специальных таблиц по $\alpha = 0{,}05$; $c = 3$ и $n = 6$ определяется граничная точка $L_{кр} = 79$.

Так как $L < L_{кр}$ (74 < 79), то гипотеза H_0 принимается на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Увеличение индивидуальных показателей при переходе от условия к условию является случайным.

Задача 81. Ответить на вопрос задачи 80 с помощью L-критерия Пейджа.

§ 19.10. φ*-КРИТЕРИЙ ФИШЕРА

φ-критерий Фишера* предназначен для сопоставления двух выборок объемами n_1 и n_2 соответственно по частоте встречаемости интересующего исследователя эффекта. Он оценивает достоверность различий между процентными долями этих двух выборок.

Ограничения на n_1 и n_2:

1) если $n_1 = 2$, то $n_2 \geqslant 30$;

2) если $n_1 = 3$, то $n_2 \geqslant 7$;

3) если $n_1 = 4$, то $n_2 \geqslant 5$;

4) при $n_1 \geqslant 5$ и $n_2 \geqslant 5$ возможны любые сопоставления.

H_0: доля лиц, у которых проявляется исследуемый эффект, в выборке 1 не больше, чем в выборке 2.

H_1: доля лиц, у которых проявляется исследуемый эффект, в выборке 1 больше, чем в выборке 2.

Из специальной таблицы по процентным долям определяются значения φ_1 и φ_2, где φ_1 (φ_2) — значение, соответствующее большей (меньшей) процентной доли.

Статистика $\varphi^* = (\varphi_1 - \varphi_2)\sqrt{n_1 n_2/(n_1 + n_2)}$.

Задается уровень значимости α. Из специальной таблицы по определяется граничная точка $\varphi_{кр}$.

Если $\varphi^* > \varphi_{кр}$, то гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α. Если $\varphi^* < \varphi_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

Пример 97. Две группы в количестве $n_1 = 25$ человек и $n_2 = 26$ человек соответственно были тестированы. В первой группе с тестом справились 20 человек, а во второй — 18 человек. Определим, случайны ли эти различия. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Доля справившихся с тестом в первой группе равна $20/25 \times 100\% = 80\%$. Доля справившихся с тестом во второй группе равна $18/26 \times 100\% \approx 69\%$.

H_0: доля лиц, справившихся с тестом, в первой группе не больше, чем во второй группе.

H_1: доля лиц, справившихся с тестом, в первой группе больше, чем во второй группе.

Из специальной таблицы по процентным долям 80% и 69% определяем значения $\varphi_1 = 2{,}214$ и $\varphi_2 = 1{,}961$.

Тогда статистика $\varphi^* = (\varphi_1 - \varphi_2)\sqrt{n_1 n_2/(n_1 + n_2)} = (2{,}214 - 1{,}961)\times$ $\times\sqrt{25\times 26/(25 + 26)} \approx 0{,}90$.

Из специальной таблицы по $\alpha = 0{,}05$ определяется граничная точка $\varphi_{кр} = 1{,}64$. Так как $\varphi^* < \varphi_{кр}$ $(0{,}90 < 1{,}64)$, то гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α. Доля лиц, справившихся с тестом, в первой группе не больше, чем во второй группе.

Задача 82. Две группы в количестве $n_1 = 30$ человек и $n_2 = 35$ человек соответственно были тестированы. В первой группе с тестом справились 25 человек, а во второй — 24 человека. Определить, случайны ли эти различия. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. $\varphi_1 = 2{,}292$ и $\varphi_2 = 1{,}961$.

§ 19.11. БИНОМИАЛЬНЫЙ m-КРИТЕРИЙ

Биномиальный m-критерий предназначен для сопоставления частоты встречаемости интересующего исследователя эффекта с теоретической или заданной частотой его встречаемости.

Биномиальный m-критерий позволяет оценить, насколько эмпирическая частота превышает теоретическую, среднестатистическую или заданную частоту, соответствующую вероятности угадывания, среднему проценту успешности в выполнении данного задания, допустимому проценту брака и т. п.

H_0: частота встречаемости данного эффекта в обследованной выборке не превышает теоретической (среднестатистической, заданной, ожидаемой, предполагаемой).

H_1: частота встречаемости данного эффекта в обследованной выборке превышает теоретическую (среднестатистическую, заданную, ожидаемую, предполагаемую).

Пусть p — заданная вероятность встречаемости исследуемого объекта ($p \leqslant 0{,}5$).

По выборке объема n определяется *эмпирическая частота встречаемости* $f_{эмп} = m$, где m — число наблюдений, в которых проявляется эффект.

Теоретическая частота встречаемости равна $f_{теор} = np$.

Биномиальный m-критерий применим в следующих случаях:

1) $f_{эмп} > f_{теор}$, $p < 0,5$; $2 \leqslant n \leqslant 50$;
2) $f_{эмп} > f_{теор}$, $p = 0,5$; $2 \leqslant n \leqslant 300$;
3) $f_{эмп} < f_{теор}$, $p > 0,5$; $2 \leqslant n \leqslant 50$.

Задается уровень значимости α. Из специальной таблицы по α, n и p определяется граничная точка $m_{кр}$.

Если $m > m_{кр}$, то гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α. Если $m < m_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

Пример 98. Из прошлого опыта известно, что 10% студентов не справляются с контрольной работой по математике. В группе из $n = 25$ студентов $m = 4$ студента не справились с контрольной работой по математике. Определим, достоверно ли отличается этот результат от контрольной величины. Уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Здесь $p = 0,1$. Тогда теоретическая частота равна $f_{теор} = np = 25 \times 0,1 = 2,5$. Так как эмпирическая частота $f_{эмп} = m = 4$, то $f_{эмп} > f_{теор}$ $(4 > 2,5)$.

H_0: число не справившихся с контрольной работой по математике не больше, чем обычно.

H_1: число не справившихся с контрольной работой по математике больше, чем обычно.

Из специальной таблицы по $\alpha = 0,05$; $n = 25$ и $p = 0,1$ находим граничную точку $m_{кр} = 6$.

Так как $m < m_{кр}$ $(4 < 6)$, то гипотеза H_0 принимается на уровне значимости $\alpha = 0,05$. Число не справившихся с контрольной работой по математике не больше, чем обычно.

Задача 83. Из прошлого опыта известно, что 10% студентов не справляются с контрольной работой по математике. В группе из $n = 25$ студентов $m = 7$ студентов не справились с контрольной работой по математике. Определить, достоверно ли отличается этот результат от контрольной величины. Уровень значимости $\alpha = 0,05$.

§ 19.12. КРИТЕРИЙ КОХРАНА

Критерий Кохрана необходим для сравнения ряда из m $(m > 2)$ выборочных дисперсий $D_1, D_2, ..., D_m$. Здесь m — это число выборок объема n.

H_0: различия среди дисперсий выборок являются случайными.

H_1: различия среди дисперсий выборок не являются случайными.

Обозначим максимальную из выборочных дисперсий через D_{max}. Тогда статистика $G = D_{max}/\sum_{i=1}^{n} D_i$.

Задается уровень значимости α. Из специальной таблицы по α, m и n определяется граничная точка $G_{кр}$.

Если $G > G_{кр}$, то гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α. Если $G < G_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

Пример 99. Выборочные дисперсии $m = 4$ выборок объема $n = 6$ равны соответственно 0,6; 1,2; 0,9 и 0,8. Определим, случайны ли различия среди дисперсий выборок. Уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Здесь $D_{max} = \max\{0,6;\ 1,2;\ 0,9;\ 0,8\} = 1,2$. Тогда статистика $G = D_{max}/\sum_{i=1}^{n} D_i = 1,2/(0,6 + 1,2 + 0,9 + 0,8) \approx 0,343$.

Из специальной таблицы по $\alpha = 0,05$; $m = 4$ и $n = 6$ находим граничную точку $G_{кр} = 0,560$.

Так как $G < G_{кр}$ (0,343 < 0,560), то гипотеза принимается на уровне значимости $\alpha = 0,05$. Различия среди дисперсий выборок являются случайными.

Задача 84. Выборочные дисперсии $m = 4$ выборок объема $n = 6$ равны соответственно 0,7; 1,1; 0,8 и 0,6. Определить, случайны ли различия среди дисперсий выборок. Уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Глава 20

ЛИНЕЙНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

§ 20.1. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ, СТАТИСТИЧЕСКАЯ И КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ЗАВИСИМОСТИ

Во многих задачах требуется установить и оценить зависимость изучаемой случайной величины Y от других случайных величин.

Две случайные величины X и Y могут быть связаны *функциональной зависимостью*. Например, $Y = 2X + 3$.

Но на практике функциональная зависимость реализуется редко, так как случайные величины подвержены еще действию случайных факторов. Если среди этих случайных факторов есть такие, которые воздействуют и на X, и на Y, то возникает *статистическая зависимость*.

Иногда статистическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной случайной величины изменяется среднее значение другой случайной величины. Такая статистическая зависимость называется *корреляционной*.

Пример 100. Пусть Y — урожай зерна, X — количество удобрений. С одинаковых по площади участков земли при равных количествах внесенных удобрений снимают различный урожай, то есть Y не является функцией от X. Это объясняется влиянием случайных факторов (температура воздуха, осадки и т. д.). Вместе с тем, как показывает опыт, средний урожай является функцией от количества удобрений, то есть между X и Y наблюдается корреляционная зависимость.

Задача 85. Привести пример корреляционной зависимости.

§ 20.2. УСЛОВНЫЕ СРЕДНИЕ

Условным средним $\overline{y}_x$ называют среднее арифметическое наблюдавшихся значений случайной величины Y, соответствующих значению x случайной величины X.

Пример 101. При значении $x = 3$ случайной величины X случайная величина Y приняла значения 4, 6, 14. Определим условное среднее $\overline{y}_x$.

Условное среднее $\overline{y}_x = \overline{y}_3 = (4 + 6 + 14)/3 = 8$.

Задача 86. При значении $x = 4$ случайной величины X случайная величина Y приняла значения 3, 7, 8. Определить условное среднее $\overline{y}_x$.

Аналогично определяется условное среднее $\overline{x}_y$.

§ 20.3. ВЫБОРОЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ РЕГРЕССИИ

Уравнение вида $\overline{y}_x = f(x)$ называется *выборочным уравнением регрессии Y на X*. Уравнение вида $\overline{x}_y = \varphi(y)$ называется *выборочным уравнением регрессии X на Y*. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ линейны. Это *линейная корреляция*.

Пусть в результате наблюдений получены пары (x_i, y_i) значений случайных величин X и Y $(i = 1, 2, ..., m_x, j = 1, 2, ..., m_y)$. Из этих данных составляется *корреляционная таблица*. Варианты x_i указаны в первой строке, варианты y_j — в первом столбце.

На пересечении строки y_j и столбца x_i указывается частота n_{ij} пары (x_i, y_j) (сколько раз на практике наблюдалась эта пара совместно).

Мы ограничимся рассмотрением случая равноотстоящих вариант: разность между любыми двумя соседними значениями x_i равна Δ_x, разность между любыми двумя соседними значениями y_j равна Δ_y.

Пусть $\overline{x}$ и $\overline{y}$ — выборочные средние для x_i и y_j соответственно, а σ_x и σ_y — выборочные стандартные отклонения для x_i и y_j соответственно.

Тогда *выборочное уравнение прямой линии Y на X* имеет следующий вид: $\overline{y}_x - \overline{y} = r_в \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$, где $r_в = \dfrac{\sum_{i=1}^{m_x}\sum_{j=1}^{m_y} n_{ij}x_i y_j - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}$ — *выборочный коэффициент корреляции*, $n = \sum_{i=1}^{m_x}\sum_{j=1}^{m_y} n_{ij}$ — общее число наблюдений.

Введем следующие обозначения: $n_{x_i} = \sum_{j=1}^{m_y} n_{ij}$, $n_{y_j} = \sum_{i=1}^{m_x} n_{ij}$.

Перейдем к условным вариантам: $u_i = (x_i - C_x)/\Delta_x$, $v_j = (y_j - C_y)/\Delta_y$. Здесь C_x и C_y — ложные нули для x_i и y_j соответственно.

Тогда $n_{u_i} = n_{x_i}$, $n_{v_j} = n_{y_j}$, $\overline{u} = \sum_{i=1}^{m_x} n_{u_i} u_i / n$, $\overline{v} = \sum_{j=1}^{m_y} n_{v_j} v_j / n$,

$\overline{u^2} = \sum_{i=1}^{m_x} n_{u_i} u_i^2 / n$, $\overline{v^2} = \sum_{j=1}^{m_y} n_{v_j} v_j^2 / n$,

$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2}$, $\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2}$,

$$r_в = \frac{\sum_{i=1}^{m_x} \sum_{j=1}^{m_y} n_{ij} u_i v_j - n \overline{u}\,\overline{v}}{n \sigma_u \sigma_v}.$$

Отсюда $\overline{x} = \overline{u}\Delta_x + C_x$, $\overline{y} = \overline{v}\Delta_y + C_y$, $\sigma_x = \sigma_u \Delta_x$, $\sigma_y = \sigma_v \Delta_y$.

Пример 102. Определим выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным корреляционной таблицы.

Y	X					
	10	20	30	40	50	60
5	3	7				
10		7	11			
15			31	4	10	
20			5	11	6	
25				2	1	2

Суммируем частоты по строкам и результат пишем в последнем столбце. Суммируем частоты по столбцам и результат пишем в последней строке. Получим следующую таблицу.

Y	X						n_{y_j}
	10	20	30	40	50	60	
5	3	7					10
10		7	11				18
15			31	4	10		45
20			5	11	6		22
25				2	1	2	5
n_{x_i}	3	14	47	17	17	2	n=100

В правой нижней клетке указана итоговая сумма.

Разность между любыми двумя соседними значениями x_i равна $\Delta_x = 10$, разность между любыми двумя соседними значениями y_j равна $\Delta_y = 5$.

Перейдем к условным вариантам. Здесь $C_x = 30$ и $C_y = 15$ — ложные нули для x_i и y_j соответственно.

Получим таблицу.

v_j	u_i						n_{v_j}
	−2	−1	0	1	2	3	
−2	3	7					10
−1		7	11				18
0			31	4	10		45
1			5	11	6		22
2				2	1	2	5
n_{u_i}	3	14	47	17	17	2	n=100

Сначала вычислим $\overline{u}$, $\overline{v}$, σ_u, σ_v. Заполним таблицу.

u_i	n_{u_i}	$n_{u_i}u_i$	$n_{u_i}u_i^2 = n_{u_i}u_iu_i$
−2	3	−6	12
−1	14	−14	14
0	47	0	0
1	17	17	17
2	17	34	68
3	2	6	18
Сумма	100	37	129

Поясним, как заполняется таблица.

Значения первых двух столбцов взяты из предыдущей таблицы. 3-й столбец равен произведению первых двух столбцов, а 4-й столбец – это произведение 1-го и 3-го столбцов. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Аналогично заполним таблицу.

v_j	n_{v_j}	$n_{v_j}v_j$	$n_{v_j}v_j^2 = n_{v_j}v_jv_j$
−2	10	−20	40
−1	18	−18	18
0	45	0	0
1	22	22	22
2	5	10	20
Сумма	100	−6	100

Тогда $\overline{u} = \sum_{i=1}^{m_x} n_{u_i}u_i/n = 37/100 = 0{,}37$; $\overline{v} = \sum_{j=1}^{m_y} n_{v_j}v_j/n = -6/100 = -0{,}06$;

$\overline{u^2} = \sum_{i=1}^{m_x} n_{u_i}u_i^2/n = 129/100 = 1{,}29$; $\overline{v^2} = \sum_{j=1}^{m_y} n_{v_j}v_j^2/n = 100/100 = 1$;

$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2} = \sqrt{1{,}29 - 0{,}37^2} \approx 1{,}07$;

$\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2} = \sqrt{1 - (-0{,}06)^2} \approx 1{,}00$.

Отсюда $\overline{x} = \overline{u}\Delta_x + C_x = 0{,}37\times10 + 30 = 33{,}7$; $\overline{y} = \overline{v}\Delta_y + C_y = -0{,}06\times5 + 15 = 14{,}7$; $\sigma_x = \sigma_u\Delta_x = 1{,}07\times10 = 10{,}7$; $\sigma_y = \sigma_v\Delta_y = 1{,}00\times5 = 5$.

Для вычисления величины $\sum\limits_{i=1}^{m_x}\sum\limits_{j=1}^{m_y} n_{ij}u_iv_j$ заполним таблицу.

v_j	u_i							
	−2	−1	0	1	2	3		
−2	3 $^{-6}$	7 $^{-7}$					−13	26
−1		7 $^{-7}$	11 ^{0}				−7	7
0			31 ^{0}	4 ^{4}	10 ^{20}		24	0
1			5 ^{0}	11 ^{11}	6 ^{12}		23	23
2				2 ^{2}	1 ^{2}	2 ^{6}	10	20
Сумма								76

Поясним, как заполняется таблица.

Каждую частоту умножаем на соответствующее значение u_i (число в 1-й строке) и результат пишем в правом верхнем углу клетки. В предпоследнем столбце указана сумма чисел в правых верхних углах клеток строки. Последний столбец равен произведению 1-го и предпоследнего столбцов. Сумма чисел последнего столбца (76) — это и есть интересующая нас сумма $\sum\limits_{i=1}^{m_x}\sum\limits_{j=1}^{m_y} n_{ij}u_iv_j$.

Тогда выборочный коэффициент корреляции равен:

$$r_e = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m_x}\sum\limits_{j=1}^{m_y} n_{ij}u_iv_j - n\overline{u}\,\overline{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{76 - 100\times0{,}37\times(-0{,}06)}{100\times1{,}07\times1{,}00} \approx 0{,}73.$$

Отсюда выборочное уравнение прямой линии Y на X: $\overline{y}_x - \overline{y} = r_e\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}) \rightarrow \overline{y}_x - 14{,}7 = 0{,}73\dfrac{5}{10{,}7}(x - 33{,}7) \rightarrow \overline{y}_x = 0{,}34x + 3{,}20$.

Задача 87. Определить выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным корреляционной таблицы.

Y	X					
	10	20	30	40	50	60
5	2	8				
10		6	12			
15			30	5	11	
20			6	10	5	
25				1	2	2

§ 20.4. ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

Если число наблюдений $n \geqslant 70$ и распределение случайных величин X, Y близко к нормальному, то практически достоверно, что истинное значение коэффициента корреляции находится в интервале $(r_в - 3\sigma_{r_в},\ r_в + 3\sigma_{r_в})$, где $\sigma_{r_в} = (1 - r_в^2)/\sqrt{n}$.

Пример 103. Определим интервал для истинного значения коэффициента корреляции в примере 102.

Так как $\sigma_{r_в} = (1 - r_в^2)/\sqrt{n} = (1 - 0{,}73^2)/\sqrt{100} \approx 0{,}05$, то $r_в \pm 3\sigma_{r_в} = 0{,}73 \pm 3 \times 0{,}05 = 0{,}73 \pm 0{,}15$, то есть искомый интервал равен $(0{,}58;\ 0{,}88)$.

Задача 88. Определить интервал для истинного значения коэффициента корреляции в задаче 87.

Ответы

9. {1, 3, 5}, {1, 2, 3, 6}.
10. 0,5 и 2/3.
14. Независимы.
15. 0,25.
16. 1/15.
17. 7/30.
18. 0,75.
19. 559/1274.
20. 0,6.
21. 125/3888.
22. 23/648.
23. 0,0007.
24. 0,87.
25. 0,5048.
26. 0,03 и 0,99.
27. 0,85.
28. 0,8294.
30.

0	1
0,5	0,5

31. 0,5.
32. 0,25.
33. 1,2 и 0,72.

Значения	0	1	2	3
Вероятности	0,216	0,432	0,288	0,064

34. 3 и 3.
36. $\begin{cases} 0, x \leqslant 0, \\ 1/8x, 0 < x \leqslant 4, \\ 0, x > 4. \end{cases}$
37. 8/3.
38. 0,4; 19/3; 19/18. $\begin{cases} 0, x \leqslant 4, \\ 0{,}1(x-4)^2, 4 < x \leqslant 6, \\ 1 - 1/15(9-x)^2, 6 < x \leqslant 9, \\ 1, x > 9. \end{cases}$

39. $2/\sqrt{\pi}\,e^{-193/16}$, 9/8, 1/8.
40. 0,6368 и 0,2206.
41. 0,5; 0,5; 0,25.
42. 6 и 3.
43.

Интервал	Середина интервала	n_i	w_i	w_i/Δ	Накопленная частота
0–5	2,5	11	0,11	0,022	0,11
5–10	7,5	21	0,21	0,042	0,32
10–15	12,5	34	0,34	0,068	0,66
15–20	17,5	18	0,18	0,036	0,84
20–25	22,5	8	0,08	0,016	0,92
25–30	27,5	8	0,08	0,016	1

44. 13,25; 46,19; 44,11.
45. (77,78; 80,22)
46. 239.
47. (77,5; 80,5).
48. 240.
49. (0,09; 0,15).
50. 77860.
51. Автомат нужно отрегулировать.
52. Станок настроен правильно.
53. Выборка не противоречит утверждению производителя.
54. Выборка не противоречит утверждению производителя.
55. Риски инвестиций равны.
56. Автоматы фасуют чай в пачки разного среднего веса.
57. По первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали.
58. По первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали.
59. Побочные эффекты от нового лекарства у женщин возникают чаще, чем у мужчин.
60. Износоустойчивость шин одинакова.
61. Есть связь между оценками.
62. 120% и 20%.
63. Базисные индексы: 67%, 100%, 117%, 167%. Цепные индексы: 150%, 117%, 143%.
64. I(май, март) = I(май, апрель) × I(апрель, март). I(май, апрель) = = I(май, март) / I(апрель, март).
65. 119%.
66. $y = 58{,}42 + 2{,}43x$.

67. 0,884; 0,781.

e_i	1,35	–1,95	4,92	–0,65	2,22	–0,38	–5,68	–3,22	–3,78	7,18

68. 71,79 тыс. руб.
69. Между результатами исследований есть связь.
70. Не влияют.
71. Не влияют.
72. Согласуются.
73. Определяются.
74. Превзошла.
75. Не превзошла.
76. Случайные различия.
77. Не является случайным.
78. Случайно.
79. Не превосходит.
80. Случайные различия.
81. Случайно.
82. Не больше.
83. Больше, чем обычно.
84. Случайные различия.
86. 6.
87. $\overline{y}_x = 0,33x + 3,38$.
88. (0,56; 0,86).

Программа учебного курса «Теория вероятностей и математическая статистика»

1. Основные понятия теории вероятностей: опыт, событие, достоверное и невозможное события, случайное событие, совместные и несовместные события, полная группа событий, противоположные события, равновозможные события, элементарный исход, вероятность. Простейшие свойства вероятности.
2. Сумма событий. Вероятность суммы двух несовместных событий.
3. Произведение событий. Зависимые и независимые события. Вероятность произведения двух независимых событий.
4. Условная вероятность. Вероятность произведения двух зависимых событий.
5. Вероятность суммы двух совместных событий.
6. Дерево вероятностей.
7. Формула Байеса.
8. Схема Бернулли.
9. Локальная теорема Муавра-Лапласа.
10. Теорема Пуассона.
11. Интегральная теорема Лапласа.
12. Простейший поток событий, его свойства (стационарность, отсутствие последействия и ординарность). Интенсивность потока.
13. Относительная частота событий. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.
14. Случайные величины. Дискретные случайные величины. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины.
15. Математическое ожидание дискретной случайной величины, его свойства.
16. Дисперсия дискретной случайной величины, ее свойства.
17. Биномиальный закон распределения вероятностей.
18. Распределение Пуассона.
19. Непрерывные случайные величины. Функция распределения (интегральный закон распределения), ее свойства.
20. Непрерывные случайные величины. Плотность распределения вероятностей (дифференциальная функция), ее свойства.
21. Математическое ожидание непрерывной случайной величины.
22. Дисперсия непрерывной случайной величины. Стандартное отклонение.

23. Нормальный закон распределения вероятностей. Плотность, математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение.

24. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал. Правило трех сигм.

25. Показательное распределение. Плотность, функция распределения, математическое ожидание и дисперсия.

26. Равномерное распределение. Плотность, функция распределения, математическое ожидание и дисперсия.

27. Задачи математической статистики. Выборочный метод. Генеральная совокупность, выборка. Причины применения выборочного метода. Случайный отбор.

28. Вариационный ряд, варианта, частота. Равновеликие и неравновеликие интервалы. Эмпирическая функция распределения. Накопленная частота. Гистограмма. Полигон. Кумулята.

29. Расчет сводных характеристик выборки. Выборочная средняя, выборочная дисперсия. Генеральная средняя, генеральная дисперсия. Несмещенная оценка. Исправленная выборочная дисперсия. Ложный нуль. Условный эмпирический момент. Поправка Шеппарда. Мода, медиана.

30. Доверительный интервал для генеральной средней при известной генеральной дисперсии.

31. Объем выборки, необходимый для оценки генеральной средней при известной генеральной дисперсии.

32. Доверительный интервал для генеральной средней при неизвестной генеральной дисперсии.

33. Объем выборки, необходимый для оценки генеральной средней при неизвестной генеральной дисперсии.

34. Доверительный интервал для генеральной доли.

35. Объем выборки, необходимый для оценки генеральной доли.

36. Испытание гипотез, процедура испытания гипотез, односторонняя и двусторонняя проверки, статистика.

37. Испытание гипотезы на основе выборочной средней при известной генеральной дисперсии.

38. Испытание гипотезы на основе выборочной средней при неизвестной генеральной дисперсии.

39. Испытание гипотезы на основе выборочной доли.

40. Испытание гипотезы о двух генеральных дисперсиях, отношение дисперсий (*F*-критерий).

41. Сравнение средних величин двух выборок при известных генеральных дисперсиях.

42. Испытание гипотезы по выборочным средним (генеральные дисперсии неизвестны, случай равенства генеральных дисперсий).

43. Испытание гипотезы по выборочным средним (генеральные дисперсии неизвестны и не равны друг другу).

44. Испытание гипотезы по двум выборочным долям.

45. Испытание гипотез по спаренным данным (зависимые выборки).

46. Непараметрические испытания гипотез. Наблюдаемая и ожидаемая частоты. Таблица сопряженности. Критерий χ^2. Поправка Йетса.

47. Индекс (темп) роста. Индекс (темп) прироста. Базисные и цепные индексы, переход от одних индексов к другим. Средний индекс роста для сгруппированных данных.

48. Простая модель линейной регрессии. Расчет коэффициентов в модели парной линейной регрессии.

49. Коэффициент корреляции Пирсона. Объясненная, необъясненная и общая вариации переменной y. Коэффициент детерминации. Ошибки и остатки.

50. Предсказания и прогнозы на основе модели линейной регрессии.

51. Основные предпосылки в модели парной линейной регрессии.

52. Множественная линейная регрессия. Регрессия и Excel.

53. Порядковые испытания. Ранговый коэффициент корреляции Спирмена.

54. Дисперсионный анализ. Межгрупповая вариация. Внутригрупповая вариация. Однофакторный дисперсионный анализ.

55. Двухфакторный дисперсионный анализ. Уровни фактора. Двухфакторный дисперсионный анализ без повторений. Двухфакторный дисперсионный анализ с повторениями.

56. λ-критерий Колмогорова-Смирнова.

57. Q-критерий Розенбаума.

58. U-критерий Манна.

59. H-критерий Крускала-Уоллиса.

60. S-критерий Джонкира.

61. G-критерий знаков. Типичные сдвиги. Нулевые реакции.

62. T-критерий Вилкоксона.

63. χ^2_r -критерий Фридмана.

64. L-критерий тенденций Пейджа.

65. φ^*-критерий Фишера.

66. Биномиальный m-критерий. Теоретические и эмпирические частоты.

67. Критерий Кохрана.

68. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости. Условные средние.

69. Выборочные уравнения регрессии. Линейная корреляция. Корреляционная таблица. Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X.

70. Выборочный коэффициент корреляции. Оценка коэффициента корреляции.

Задачи для контрольной работы по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика»

1–10. В первой урне находятся a белых и b черных шаров, во второй урне — c белых и d черных шаров. Из первой урны во вторую переложили 2 шара, а затем из второй урны извлекли один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

	a	*b*	*c*	*d*
1	12	8	3	5
2	17	3	4	4
3	16	4	5	2
4	15	5	6	1
5	14	6	5	2

	a	*b*	*c*	*d*
6	13	7	2	5
7	11	9	6	2
8	10	10	1	6
9	9	11	3	5
10	8	12	2	6

11–20. На заводах A и B изготовлено $m\%$ и $n\%$ всех деталей. Из прошлых данных известно, что $a\%$ деталей завода A и $b\%$ деталей завода B оказываются бракованными. Случайно выбранная деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена на заводе A?

	a	*b*	*m*	*n*
11	15	25	80	20
12	30	10	90	10
13	20	5	85	15
14	5	30	70	30
15	5	15	60	40

	a	*b*	*m*	*n*
16	25	10	75	25
17	30	20	55	45
18	5	10	65	35
19	30	15	95	5
20	20	10	20	80

21–30. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна p. Найти вероятность того, что при n выстрелах мишень будет поражена не менее k_1 и не более k_2 раз.

	p	k_1	k_2	n
21	0,2	1	3	6
22	0,3	600	660	2100
23	0,4	250	600	600
24	0,5	5	7	8
25	0,5	43	57	100

	p	k_1	k_2	n
26	0,7	1500	2100	2100
27	0,3	3	6	6
28	0,6	345	375	600
29	0,8	86	100	100
30	0,9	86	94	100

31–40. Среднее число самолетов, прибывающих в аэропорт за 1 минуту, равно m. Найти вероятность того, что за время n минут прибудут а) s самолетов; б) не менее s самолетов. Поток предполагается простейшим.

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
m	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8
n	2	3	6	7	8	8	7	6	3	2
s	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2

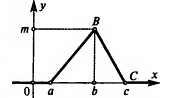
41–50. Произведено n независимых испытаний. В каждом из них вероятность появления события A равна p. Найти вероятность того, что отклонение относительной частоты от постоянной вероятности по абсолютной величине не превысит заданного числа ε.

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
n	200	300	400	600	700	800	900	1100	1200	1300
p	0,2	0,25	0,35	0,45	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8
ε	0,02	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,05	0,04	0,02

51–60. Дискретная случайная величина принимает значения x_i с вероятностями p_i. Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
x_1	1	4	6	3	8	3	4	4	1	8
x_2	5	7	2	6	7	5	7	5	2	3
x_3	3	1	8	7	3	7	5	6	8	4
p_1	0,1	0,4	0,3	0,6	0,4	0,5	0,6	0,5	0,8	0,1
p_2	0,7	0,5	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2	0,3	0,1	0,5
p_3	0,2	0,1	0,5	0,1	0,4	0,4	0,2	0,2	0,1	0,4

61–70. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид, показанный на графике. Найти неизвестное число m, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.



	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
a	2	1	1	1	2	2	4	4	4	3
b	3	2	3	3	4	4	6	5	5	4
c	4	3	4	5	5	6	10	6	8	5

71–80. Плотность распределения вероятностей нормально распределенной случайной величины X имеет вид $f(x) = \gamma e^{-ax^2+bx+c}$. Найти неизвестное число γ, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, вероятность выполнения неравенств $\alpha < X < \beta$ и $|X - M(X)| < \delta$.

	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
a	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
b	8	6	4	10	12	2	4	6	8	10
c	−2	−1	−3	−4	−5	1	2	3	4	5
α	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
β	4	5	6	7	8	2	3	4	5	6
δ	0,1	0,2	0,15	0,25	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,1

81–90. Из текущей продукции произведен выбор распределенной случайной величины X валиков. Найти реализацию оценки математического ожидания и стандартного отклонения распределенной случайной величины X — отклонения диаметра валика от номинала.

	от −20 до −15	от −15 до −10	от −10 до −5	от −5 до 0	от 0 до 5	от 5 до 10	от 10 до 15	от 15 до 20	от 20 до 25	от 25 до 30
81	7	11	14	25	50	40	27	16	7	3
82	6	12	13	26	51	41	27	13	8	3
83	5	13	15	24	52	42	25	15	8	1
84	4	14	16	23	53	42	25	14	7	2
85	3	15	17	22	54	41	26	13	6	3
86	7	12	15	24	53	39	28	12	6	4
87	6	13	16	23	51	38	27	16	8	2
88	5	13	17	23	52	39	26	15	7	3
89	4	14	18	22	53	40	25	16	6	1
90	3	11	19	25	54	40	24	18	5	1

91–100. Автомат фасует сахар в пакеты. Проведена случайная выборка объемом n пакетов. Средний вес пакета сахара в выборке $\overline{X}$ кг, выборочное стандартное отклонение s кг. Найти доверительный интервал для среднего веса пакета сахара в генеральной совокупности с доверительной вероятностью p в случае:

а) стандартное отклонение автомата σ кг;

б) стандартное отклонение автомата неизвестно.

Определить необходимый объем выборки для достижения ширины доверительного интервала $\%\Delta$. Проверить гипотезу о равенстве генеральной средней 1 кг.

	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
$\overline{X}$	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
n	30	34	33	35	36	32	37	38	39	31
σ	0,01	0,07	0,03	0,06	0,09	0,02	0,08	0,04	0,10	0,05
Δ	0,10	0,15	0,18	0,12	0,19	0,11	0,13	0,16	0,14	0,17
p	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99
s	0,05	0,10	0,04	0,08	0,02	0,09	0,06	0,03	0,17	0,01

101–110. Проведена выборка объемом n_1 деталей. r_1 из них оказались бракованными. Найти доверительный интервал доли бракованных изделий в генеральной совокупности для доверительной вероятности p. Определить необходимый объем выборки для достижения ширины доверительного интервала $\pm\Delta$. В повторной выборке объема n_2 r_2 деталей оказались бракованными. Понизилась ли доля брака?

	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
n_1	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900
r_1	200	190	180	170	160	150	140	130	120	110
Δ	0,01	0,02	0,09	0,08	0,07	0,03	0,04	0,06	0,12	0,05
n_2	1100	1150	1250	1330	1430	1570	1620	1780	1900	2000
r_2	190	185	170	165	155	140	135	120	115	108
p	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99

111–120. Для производства каждой из $n_1 = 53$ деталей по первой технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_1$ с (выборочная дисперсия s_1^2 с^2). Для производства каждой из $n_2 = 43$ деталей по второй технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_2$ с (выборочная дисперсия s_2^2 с^2). Можно ли сделать вывод, что по первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали? Доверительная вероятность равна p.

	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
$\overline{X}_1$	38	39	33	37	35	37	37	38	42	40
s_1^2	4	5	7	8	4	5	7	8	3	2
$\overline{X}_2$	31	32	31	34	32	36	35	33	40	34
s_2^2	2	3	8	7	5	4	7	8	5	4
p	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99

121–130. Проводились испытания нового лекарства. В эксперименте участвовали n_1 мужчин и n_2 женщин. У m_1 мужчин и m_2 женщин наблюдались побочные эффекты. Можно ли утверждать, что побоч-

ные эффекты от нового лекарства у женщин возникают реже, чем у мужчин? Доверительная вероятность равна *p*.

	121	**122**	**123**	**124**	**125**	**126**	**127**	**128**	**129**	**130**
n_1	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900
m_1	200	190	180	170	160	150	140	130	120	110
n_2	1100	1150	1250	1330	1430	1570	1620	1780	1900	2000
m_2	190	185	170	165	155	140	135	120	115	108
p	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99

131—140. В таблице указана цена товара с февраля по май. Найти соответствующие индексы роста и прироста, а также соответствующие цепные и базисные индексы (февраль — базовый месяц).

	февраль	**март**	**апрель**	**май**
131	20	30	50	75
132	30	45	70	90
133	25	40	50	80
134	40	70	85	100
135	25	50	70	100

	февраль	**март**	**апрель**	**май**
136	20	45	50	70
137	30	40	45	60
138	40	50	60	80
139	45	55	70	80
140	35	50	60	90

141—150. Известны данные по объему продаж товаров *А, Б, В, Г* в 2006 году и рост объема продаж (в %) в 2007 году. Найти средний индекс роста.

	Объем продаж				**Рост объема продаж**			
	А	*Б*	*В*	*Г*	*А*	*Б*	*В*	*Г*
141	20	30	50	75	10	15	5	20
142	30	45	70	90	30	10	20	25
143	25	40	50	80	20	5	40	10
144	40	70	85	100	40	30	10	5
145	25	50	70	100	10	20	15	5
146	20	45	55	70	5	20	15	10
147	30	40	45	60	30	15	20	5
146	40	50	60	80	5	40	50	30
149	45	55	70	80	40	10	25	20
150	35	50	60	90	25	20	30	15

151—160. По результатам наблюдений найти оценки коэффициентов уравнения линейной регрессии $y = a + bx$, коэффициент корреляции Пирсона, коэффициент детерминации, проверить гипотезу о наличии линейной связи. Если гипотеза верна, то построить дове-

рительный интервал для коэффициента наклона линии линейной регрессии и дать прогноз для $x = x_0$.

	x					y					x_0
151	1	5	3	4	7	1	5	5	2	8	2
152	3	6	7	8	7	1	3	5	5	4	4
153	4	7	5	4	5	3	1	2	2	1	6
154	9	8	3	4	1	0	1	4	3	5	7
155	1	0	3	3	0	2	3	5	6	4	2
156	0	4	7	8	5	2	6	8	7	5	6
157	4	2	3	4	3	8	6	8	7	6	5
158	7	5	1	0	3	8	6	4	2	4	4
159	3	5	7	2	5	1	3	5	0	1	4
160	4	4	8	9	5	6	2	9	9	4	7

161–170. По результатам наблюдений с помощью пакета Excel найти точечные и интервальные оценки коэффициентов уравнения линейной регрессии $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$. Является ли модель статистически значимой? Все ли коэффициенты статистически значимы?

	161	**162**	**163**	**164**	**165**	**166**	**167**	**168**	**169**	**170**
x_1	8	8	7	1	1	2	1	6	1	3
	2	6	1	8	4	5	9	9	8	1
	9	9	5	2	6	7	4	2	3	5
	7	6	5	5	9	1	1	5	2	4
	1	8	5	1	9	3	5	8	2	9
	8	3	2	4	1	1	2	2	4	9
	3	5	8	8	2	5	1	4	1	3
	3	8	2	5	2	1	4	5	9	1
	4	2	9	2	5	2	1	7	5	2
	1	8	6	1	8	2	3	7	4	8
x_2	1	2	8	8	3	3	9	5	2	5
	5	2	8	1	5	3	6	2	5	7
	0	9	5	4	2	4	8	8	3	2
	5	9	9	7	1	6	2	7	4	1
	8	9	6	2	5	8	4	3	1	2
	8	3	2	7	2	1	3	5	2	1
	3	3	1	1	5	5	7	8	7	3
	1	2	9	8	8	7	2	4	6	7
	5	3	5	5	3	6	5	6	3	4
	2	7	4	6	7	2	2	7	8	8
y	2	8	1	5	4	1	6	4	3	7

	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
y	1	5	3	2	6	9	1	9	5	7
	5	3	5	8	8	4	9	1	4	5
	2	8	4	3	5	1	3	2	6	4
	4	9	9	8	3	5	2	6	9	2
	6	4	5	5	5	2	7	1	2	8
	6	1	1	9	1	7	1	2	1	1
	9	4	9	4	4	1	4	4	3	3
	7	6	1	1	1	3	3	6	9	4
	3	7	5	5	2	2	9	6	4	2

171–180. Два человека дегустируют 10 сортов кофе. Каждый из них расположил эти сорта в порядке убывания предпочтений. Есть ли какая-нибудь связь между этими результатами? Доверительная вероятность p.

	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
Дег. 1	8	7	8	7	1	1	3	5	2	9
	10	6	2	1	4	9	7	1	1	3
	1	5	9	5	6	4	9	9	4	1
	2	9	7	10	9	10	6	10	10	4
	6	1	1	2	10	5	10	6	5	7
	3	2	10	8	2	2	4	2	3	2
	4	4	3	9	5	3	2	4	6	10
	5	8	4	6	8	6	5	7	8	5
	9	3	5	3	3	8	1	3	7	6
	7	10	6	4	7	7	8	8	9	8
Дег. 2	9	8	8	1	2	6	7	5	3	6
	8	3	6	8	5	9	6	1	1	10
	1	2	9	2	7	2	4	4	7	4
	10	4	10	5	1	5	1	9	2	2
	2	1	3	10	3	8	10	10	5	1
	6	10	5	4	10	10	9	8	10	7
	7	9	2	7	6	4	8	3	4	8
	4	6	7	6	4	7	3	2	9	9
	3	5	1	3	8	3	2	6	6	5
	5	7	4	9	9	1	5	7	8	3
p	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99

181–190. а) В продовольственном магазине проведены контрольные взвешивания проданной колбасы. Полученные данные указаны в таблице.

Недовес, г	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*k*

Определить с помощью λ-критерия Колмогорова-Смирнова на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, согласуются ли данные выборки с равномерным распределением на отрезке [0, 10].

б) Две группы студентов были протестированы. В таблице указано число правильных ответов каждого участника теста.

Группа 1	Группа 2
a	*b*
c	*d*
e	*f*
g	*h*
—	*k*

Можно ли утверждать, что одна из групп превзошла другую группу по результатам теста? Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

в) Три группы студентов были протестированы. В таблице указано число правильных ответов каждого участника теста.

Группа 1	Группа 2	Группа 3
a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*k*
m	—	—

Можно ли утверждать, что между группами существуют лишь случайные различия по результатам теста? Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

г) Студенты первого, второго и третьего курсов были протестированы. В таблице указано число правильных ответов каждого участника теста.

Курс 1	Курс 2	Курс 3
a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*k*
m	*n*	*p*
q	*r*	*s*

Можно ли считать, что увеличение числа правильных ответов при переходе от курса к курсу является случайным? Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

д) В таблице указаны места спортсмена на этапах кубка мира, завоеванные под руководством разных тренеров.

Тренер *A*	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
Тренер *B*	*f*	*g*	*h*	*k*	*m*

Определить, повлияла ли отставка тренера на выступление спортсмена. Уровень значимости $\alpha = 0,05$.

е) Ответить на вопрос пункта д) с помощью Т-критерия Вилкоксона.

	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
a	12	8	10	12	9	10	11	12	10	10
b	14	9	8	8	10	9	12	9	8	8
c	11	10	9	9	9	10	8	11	10	9
d	12	8	12	10	10	8	9	10	14	10
e	8	9	8	9	8	9	10	9	9	9
f	9	12	9	10	12	11	8	11	8	9
g	10	14	10	8	8	12	9	12	12	10
h	8	11	8	9	9	8	12	8	11	8
k	9	12	12	12	10	9	14	12	9	10
m	10	12	11	8	11	11	10	9	9	9
n	12	8	9	10	11	9	11	9	9	9
p	8	12	10	8	10	9	8	9	8	9
q	9	11	9	9	9	9	9	9	10	8
r	10	9	10	12	11	8	12	10	8	10
s	11	9	8	14	12	8	8	10	9	12

191–200. а) Выборочные дисперсии $m = 4$ выборок объема $n = 6$ равны соответственно *a*, *b*, *c*, *d*. Определить, случайны ли различия среди дисперсий выборок. Уровень значимости $\alpha = 0,05$.

б) При значении $x = 4$ случайной величины X случайная величина Y приняла значения *a*, *b*, *c*, *d*. Определить условное среднее $\overline{y}_x$.

	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
a	1,2	0,8	1,0	1,2	0,9	1,0	1,1	1,2	1,0	1,0
b	1,4	0,9	0,8	0,8	1,0	0,9	1,2	0,9	0,8	0,8
c	1,1	1,0	0,9	0,9	0,9	1,0	0,8	1,1	1,0	0,9
d	1,2	0,8	1,2	1,0	1,0	0,8	0,9	1,0	1,4	1,0

201–210. Определить выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным корреляционной таблицы. Найти интервал для истинного значения коэффициента корреляции.

Y	*X*					
	10	20	30	40	50	60
5	*a*	*b*				
10		*c*	*d*			
15			*e*	*f*	*g*	
20			*h*	*k*	*m*	
25				*n*	*p*	*q*

	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
a	2	2	4	1	4	2	2	2	3	4
b	3	6	2	5	2	4	4	4	3	2
c	7	4	6	5	6	3	6	6	5	5
d	3	4	4	3	2	7	2	3	4	3
e	2	7	6	9	5	5	3	6	20	5
f	50	35	45	40	40	30	50	45	22	45
g	2	8	2	2	5	10	2	4	8	5
h	1	2	2	4	2	7	1	2	5	2
k	10	10	8	11	8	10	10	8	10	8
m	6	8	6	6	7	8	6	6	6	7
n	4	5	4	4	4	5	4	4	4	4
p	7	6	7	7	7	6	7	7	7	7
q	3	3	4	3	8	3	3	3	3	3

Замечание. Граничные точки в задачах 181—200 следует брать из решения аналогичных примеров раздела.

Раздел IV

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Глава 1

КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторными задачами принято называть задачи, в которых необходимо подсчитать, сколькими способами можно осуществить то или иное требование, выполнить какое-либо условие, сделать тот или иной выбор.

§ 1.1. РАЗМЕЩЕНИЯ

Пусть имеется множество из n элементов. Говоря об *упорядоченных подмножествах* этого множества, считают, что подмножества, отличающиеся только порядком следования элементов, различны.

Пример 1. Дано множество $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Подмножества $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 3, 2\}$, $D = \{2, 3, 4\}$ — это различные упорядоченные подмножества множества A.

Задача 1. Для множества A из примера 1 указать три трехэлементных упорядоченных подмножества, отличные от B, C, D.

Каждое упорядоченное подмножество из k элементов множества из n элементов называется *размещением из n элементов по k элементов*. Множества B, C, D из примера 1 — это примеры размещений из 4 элементов по 3 элемента.

Число всех размещений из n элементов по k элементов обозначается через A_n^k («A из n по k»).

Теорема. $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, где $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$.

Пример 2. В однокруговом турнире по футболу участвуют 8 команд. Сколько существует вариантов призовой тройки?

Так как порядок команд в призовой тройке важен (от этого зависит достоинство медалей), то мы имеем дело с размещениями. Нужно определить число всех размещений из $n = 8$ команд по $k = 3$ команды.

Тогда $A_n^k = A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{5!\times 6\times 7\times 8}{5!} = 6\times 7\times 8 = 336$ вариантов.

Задача 2. В восьмом классе изучается 15 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на среду, если известно, что в этот день должно быть 6 уроков?

§ 1.2. ПЕРЕСТАНОВКИ

Размещения из n элементов по n элементов называются *перестановками из n элементов*. Число всех перестановок из n элементов обозначается через P_n.

Теорема. $P_n = n! = 1 \times 2 \times ... \times n$.

Пример 3. В финальном забеге на 100 м участвуют 8 спортсменов. Сколько существует вариантов протокола забега?

Понятно, что в данном случае речь идет обо всех перестановках из $n = 8$ элементов. Тогда $P_n = P_8 = 8! = 40320$ вариантов.

Задача 3. На собрании выступят 6 ораторов. Сколькими способами их можно расположить в списке?

§ 1.3. СОЧЕТАНИЯ

Пусть имеется множество из n элементов. Каждое его подмножество из k элементов называется *сочетанием из n элементов по k элементов*. Здесь различные подмножества имеют неодинаковый состав. Подмножества, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов, не считаются различными.

Пример 4. В примере 1 подмножества B и C — это пример одного сочетания, так как они отличаются друг от друга только порядком следования элементов. А вот подмножества B и D — это пример разных сочетаний.

Задача 4. Для множества A из примера 1 указать другие сочетания.

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается через C_n^k («C из n по k»).

Теорема. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, где $n! = 1 \times 2 \times ... \times n$.

Пример 5. В однокруговом турнире по футболу участвуют 8 команд. Сколько всего матчей будет сыграно?

В данном случае речь идет о числе всех сочетаний из $n = 8$ команд по $k = 2$ команды.

Тогда $C_n^k = C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2 \times 6!} = \frac{6! \times 7 \times 8}{2 \times 6!} = \frac{7 \times 8}{2} = 28$ матчей.

Задача 5. В отборочном турнире за 3 путевки на чемпионат мира участвуют 10 команд. Сколько существует вариантов «счастливой тройки»?

Глава 2

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

§ 2.1. ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Высказывание — это некое утверждение, о котором можно говорить, что оно истинно или ложно.

Пример 6. Высказывание «Пекин — столица летних Олимпийских игр 2008 года» истинно. Высказывание «21 > 23» ложно.

Задача 6. Что можно сказать о высказываниях «Париж — столица Франции» и «8 — простое число»?

Элементарное высказывание — это одно утверждение. Будем обозначать элементарные высказывания малыми буквами латинского алфавита x, y, z, ..., истинное высказывание — цифрой 1, ложное высказывание — цифрой 0.

Мы будем рассматривать функции на множестве переменных x и y. Переменные и функции могут принимать только значения 0 и 1. Это *булевы функции.*

§ 2.2. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ

Значение функции можно задать с помощью таблицы истинности, которая показывает, чему равна функция на всех возможных комбинациях значений ее переменных.

Пример 7. Отрицание $\bar{x}$. Таблица истинности этой функции имеет следующий вид:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Мы видим, что отрицание меняет возможные значения переменной на противоположные.

Пример 8. Дизъюнкция $x \vee y$. Таблица истинности этой функции имеет следующий вид:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Мы видим, что дизъюнкция равна 1, если хотя бы один из ее аргументов равен 1.

Пример 9. Конъюнкция $x \& y$. Таблица истинности этой функции имеет следующий вид:

x	y	$x \& y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Мы видим, что конъюнкция равна 1 тогда и только тогда, когда оба ее аргумента равны 1.

Пример 10. Импликация $x \rightarrow y$. Таблица истинности этой функции имеет следующий вид:

x	y	$x \rightarrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Пример 11. Эквиваленция $x \sim y$. Таблица истинности этой функции имеет следующий вид:

x	y	$x \sim y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

С помощью введенных операций можно строить различные булевы функции. Порядок выполнения операций указывается скобками. Для упрощения записи принят ряд соглашений:

1) для отрицания скобки опускаются;

2) & имеет приоритет перед $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$;

3) $\vee$ имеет приоритет перед $\rightarrow$, $\sim$.

Любая булева функция полностью определяется своей таблицей истинности.

Пример 12. Определим таблицу истинности булевой функции $x \& \overline{y} \to (\overline{x} \vee y)$.

x	y	$\overline{x}$	$\overline{x} \vee y$	$\overline{y}$	$x \& \overline{y}$	$x \& \overline{y} \to (\overline{x} \vee y)$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1

Искомая таблица истинности:

x	y	$x \& \overline{y} \to (\overline{x} \vee y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Задача 7. Определить таблицу истинности булевой функции $(x \to y) \& \overline{x \vee y}$.

§ 2.3. РАВНОСИЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Две функции называются ***равносильными***, если они принимают одинаковые значения на любом наборе значений входящих в эти функции переменных, то есть у этих функций одинаковые таблицы истинности.

Пример 13. Используя результаты примеров 10 и 12, получаем, что функции $x \to y$ и $x \& \overline{y} \to (\overline{x} \vee y)$ равносильны: $x \to y = x \& \overline{y} \to (\overline{x} \vee y)$.

Задача 8. Равносильны ли функции $\overline{x} \vee y$ и $x \to y$?

Основные равносильности:

1. $x \vee 1 = 1.$
2. $x \vee 0 = x.$
3. $x \& 1 = x.$
4. $x \& 0 = 0.$
5. $x \vee x = x.$
6. $x \& x = x.$
7. $x \vee \overline{x} = 1.$
8. $x \& \overline{x} = 0.$
9. $\overline{\overline{x}} = x.$
10. $\overline{x \vee y} = \overline{x} \& \overline{y}.$
11. $\overline{x \& y} = \overline{x} \vee \overline{y}.$
12. $x \& (x \vee y) = x.$
13. $x \vee x \& y = x.$
14. $x \& y = y \& x.$
15. $x \vee y = y \vee x.$

Глава 3

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Для любой булевой функции можно построить ее таблицу истинности. Но и по таблице истинности можно восстановить булеву функцию. Покажем, как это делается.

§ 3.1. СОВЕРШЕННАЯ ДИЗЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Возьмем наборы переменных, на которых функция равна единице. Если значение переменной в этом наборе равно 0, то эта переменная берется с отрицанием. Если значение переменной в этом наборе равно 1, то эта переменная берется без отрицания.

Соединив все переменные, соответствующие этому набору, через знак & (причем сам знак & для краткости будем опускать), мы получим *элементарную конъюнкцию*. Тогда дизъюнкция всех элементарных конъюнкций, соответствующих наборам значений переменных, где функция равна единице, и восстанавливает исходную функцию. Это *совершенная дизъюнктивная нормальная форма* (*СДНФ*) нашей функции.

Пример 14. Построим СДНФ для функции, таблица истинности которой имеет следующий вид.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Функция принимает значение 1 на наборах 001, 010 и 101.

Набору 001 соответствует элементарная конъюнкция $\overline{x}\ \&\ \overline{y}\ \&\ z = \overline{x}\ \overline{y}\ z$. Набору 010 соответствует элементарная конъюнкция $\overline{x}\ y\ \overline{z}$. Набору 101 соответствует элементарная конъюнкция $x\ \overline{y}\ z$.

Получаем СДНФ $f = \overline{x}\ \overline{y}\ z \vee \overline{x}\ y\ \overline{z} \vee x\ \overline{y}\ z$.

Задача 9. Построить СДНФ для функции, таблица истинности которой имеет следующий вид.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

§ 3.2. СОВЕРШЕННАЯ КОНЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Возьмем наборы переменных, на которых функция равна нулю. Если значение переменной в этом наборе равно 0, то эта переменная берется без отрицания. Если значение переменной в этом наборе равно 1, то эта переменная берется с отрицанием.

Соединив все переменные, соответствующие этому набору, через знак $\vee$, мы получим *элементарную дизъюнкцию*. Тогда конъюнкция всех элементарных дизъюнкций, соответствующих наборам значений переменных, где функция равна нулю, и восстанавливает исходную функцию. Это *совершенная конъюнктивная нормальная форма* (*СКНФ*) нашей функции. Знак & для краткости будем опускать.

Пример 15. Построим СКНФ для функции из примера 14.

Функция принимает значение 0 на наборах 000, 011, 100, 110 и 111.

Набору 000 соответствует элементарная дизъюнкция $x \vee y \vee z$. Набору 011 соответствует элементарная дизъюнкция $x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$. И т. д.

Получаем СКНФ $f = (x \vee y \vee z)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)$ $(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$.

Задача 10. Построить СКНФ для функции из задачи 9.

Глава 4

ПРЕДИКАТЫ

§ 4.1. ОДНОМЕСТНЫЙ ПРЕДИКАТ

Одноместный предикат $P(x)$ — это произвольная функция переменной x, определенная на множестве M и принимающая значения на множестве {0 (ложно); 1 (истинно)}.

При подстановке вместо x конкретного значения из множества M одноместный предикат превращается в высказывание.

Пример 16. Пусть M — это множество натуральных чисел. Одноместный предикат $P(x)$ = «x — простое число». Тогда $P(2)$ = «2 — простое число» истинно (1), а $P(4)$ = «4 — простое число» ложно (0).

Задача 11. Привести пример одноместно предиката.

Те значения переменной, на которых предикат принимает истинное значение, образуют *множество истинности предиката.*

§ 4.2. КВАНТОРНЫЕ ОПЕРАЦИИ

Пусть $P(x)$ — одноместный предикат, определенный на множестве M. *Квантор общности* $\forall$ превращает предикат $P(x)$ в высказывание $\forall x\, P(x)$ = «для всякого x $P(x)$ истинно».

Пример 17. В примере 16 $\forall x\, P(x)$ = «для всех натуральных x число x простое» — это ложное высказывание.

Задача 12. Применить квантор общности в задаче 11.

Квантор существования $\exists$ превращает предикат $P(x)$ в высказывание $\exists x\, P(x)$ = «существует x такой, что $P(x)$ истинно».

Пример 18. В примере 16 $\exists x\, P(x)$ = «существует натуральное число x такое, что x простое» истинно.

Задача 13. Применить квантор существования в задаче 11.

Глава 5

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Представим на плоскости конечное множество точек V и некоторое множество линий X, соединяющих попарно какие-то точки из V. Например, схема автодорог, соединяющих населенные пункты Московской области.

Множество точек (населенных пунктов) назовем *множеством вершин*, а соединяющие линии (автодороги) — *множеством ребер*. Совокупность двух множеств (вершин и ребер) называют *графом*.

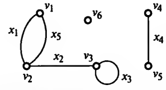
На некоторых участках допускается только одностороннее движение. Тогда соответствующее ребро называется *дугой* и изображается стрелкой, направленной от начальной вершины к конечной вершине.

Граф, состоящий из дуг, называют *ориентированным* (или просто *орграфом*), а образованный ребрами — *неориентированным*.

Один и тот же граф можно изобразить по-разному. Вершины можно располагать по своему усмотрению и произвольно выбирать форму соединяющих линий. В этом проявляется свойство *изоморфизма графов*.

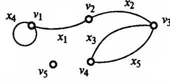
Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется *петлей*. Ребра с одинаковыми концевыми вершинами называются *кратными*. *Изолированная вершина* не соединена с другими вершинами.

Пример 19. Задан граф G_1, состоящий из вершин v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 и ребер x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

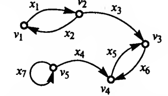


v_6 — изолированная вершина, x_1 и x_5 — кратные ребра, x_3 — петля, v_1 и v_2 — концевые вершины ребра x_1.

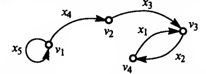
Задача 14. Для графа G указать вершины, ребра, изолированные вершины, кратные ребра, петли.



Пример 20. Задан орграф G_2. У дуги x_3 вершина v_2 — начальная, а вершина v_3 — конечная, x_7 — петля.



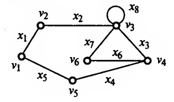
Задача 15. Для орграфа D указать вершины, дуги, петли.



Часто на графе требуется выделить различные маршруты, обладающие определенными свойствами. *Маршрут* длины m — это последовательность $x_1, ..., x_m$ m ребер графа (не обязательно различных) таких, что любые два соседних ребра x_i, x_{i+1} имеют общую концевую вершину.

Замкнутый маршрут приводит в ту же вершину, из которой он начался. *Цепь* — это маршрут, все ребра которого различны. *Простая цепь* — это цепь без повторяющихся вершин. Замкнутая цепь называется *циклом*. *Простой цикл* — это простая замкнутая цепь.

Пример 21. Дан граф G. $x_1x_2x_3x_6x_7x_2$ — маршрут длины 6, соединяющий вершины v_1 и v_2.



$x_1x_2x_3x_6x_7x_2x_1$ — замкнутый маршрут длины 7. Он начинается и заканчивается в вершине v_1. $x_1x_2x_3x_6x_7$ — цепь длины 5 (все ребра в ней различны). Эта цепь не является простой, так как при обходе вершину v_3 мы посетили два раза. $x_1x_2x_3$ — пример простой цепи (все вершины на нашем пути были различны). $x_6x_7x_8x_3$ — цикл. $x_7x_6x_3$ — простой цикл.

Задача 16. Для графа G из задачи 14 привести примеры маршрута, замкнутого маршрута, цепи, простой цепи, цикла, простого цикла.

В случае орграфа вместо слова «цепь» говорят «*путь*», а слово «цикл» заменяют на слово «*контур*».

Итак, для задания графа необходимо указать два множества: V (множество вершин) и X (множество ребер или дуг). Но при большом числе элементов рисунок графа становится громоздким. В этом случае используют *матричный способ*. Выбор матрицы определяется конкретной задачей.

Дан граф G с вершинами $v_1, ..., v_n$ и ребрами $x_1, ..., x_m$.

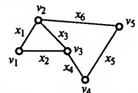
Матрица смежности графа G — это квадратная матрица $A(G)$ размера $n \times n$ (n — число вершин) с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если в графе } G \text{ вершины } v_i, v_j \text{ соединены ребром} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Матрица инцидентности графа G — это матрица $B(G)$ размера $n \times m$ (n — число вершин, m — число ребер) с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } v_i \text{ — концевая вершина ребра } x_j \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Пример 22. Для графа G построим матрицу смежности $A(G)$ и матрицу инцидентности $B(G)$.



Так как у графа 5 вершин и 6 ребер, то размер матрицы $A(G)$ будет 5×5, а матрицы $B(G)$ — 5×6.

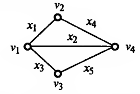
$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$a_{12} = 1 \Leftrightarrow$ в графе G есть ребро, соединяющее вершины v_1 и v_2. $a_{13} = 1 \Leftrightarrow$ в графе G есть ребро, соединяющее вершины v_1 и v_3. $a_{14} = 0$ $\Leftrightarrow$ в графе G нет ребра, соединяющего вершины v_1 и v_4. И т. д.

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$b_{11} = 1 \Leftrightarrow v_1$ — концевая вершина для ребра x_1. $b_{12} = 1 \Leftrightarrow v_1$ — концевая вершина для ребра x_2. $b_{13} = 0 \Leftrightarrow v_1$ не является концевой вершиной для ребра x_3. И т. д.

Задача 17. Для графа G построить матрицу смежности $A(G)$ и матрицу инцидентности $B(G)$.



Дан орграф D с вершинами $v_1, ..., v_n$ и дугами $x_1, ..., x_m$.

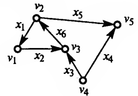
Матрица смежности орграфа D — это квадратная матрица $A(D)$ размера $n \times n$ (n — число вершин) с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если в орграфе } D \text{ есть дуга из } i\text{-й вершины в } j\text{-ю} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Матрица инцидентности орграфа D — это матрица $B(D)$ размера $n \times m$ (n — число вершин, m — число дуг) с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я дуга заканчивается в } i\text{-й вершине} \\ -1, & \text{если } j\text{-я дуга начинается в } i\text{-й вершине} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример 23. Для орграфа D построим матрицу смежности $A(D)$ и матрицу инцидентности $B(D)$.



Орграф D содержит 5 вершин и 6 дуг, поэтому размер матрицы $A(D)$ будет 5×5, а матрицы $B(D)$ — 5×6.

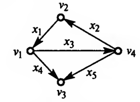
$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$a_{12} = 0 \Leftrightarrow$ орграф D не содержит дуги из v_1 в v_2. $a_{13} = 1 \Leftrightarrow$ орграф D содержит дугу из v_1 в v_3. И т. д.

$$B(D) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

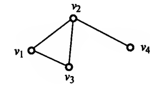
$b_{11} = 1 \Leftrightarrow$ в вершине v_1 заканчивается дуга x_1. $b_{12} = -1 \Leftrightarrow$ в вершине v_1 начинается дуга x_2. $b_{13} = 0 \Leftrightarrow$ вершина v_1 не является концевой вершиной для дуги x_3. И т. д.

Задача 18. Для орграфа D построить матрицу смежности $A(D)$ и матрицу инцидентности $B(D)$.

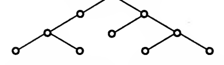


Граф G называется *связным*, если для любых двух его вершин существует маршрут, их соединяющий. Связный граф, не содержащий циклов, называется *деревом* (примеры деревьев: генеалогический граф (родословное дерево), совокупность всех файлов на дискете).

Пример 24. Граф G не является деревом, так как содержит цикл v_1, v_2, v_3.



Задача 19. Является ли следующий граф G деревом?



Очень часто на ребрах графа пишут числа. Такие графы называются *структурными* (или *сетью*). Вершины сети будем называть *узлами*, а ребра — *дугами*.

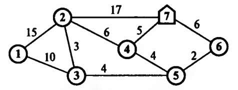
Глава 6

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ

§ 6.1. МЕТОД ПРИСВОЕНИЯ МЕТОК

Задача состоит в том, чтобы найти кратчайший путь на графе от какой-то выделенной вершины до любой другой вершины.

Пример 25. Узел 7 — склад, остальные узлы — строительные площадки компании. Показатели на дугах — расстояния в километрах.

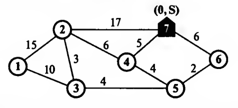


Надо найти кратчайшие расстояния от склада до каждой строительной площадки. Какова длина кратчайшего пути от склада до строительной площадки 1? Проходит ли кратчайший путь от склада к строительной площадке 1 через строительную площадку 2? Какова длина кратчайшего пути от склада до строительной площадки 2? Проходит ли кратчайший путь от склада к строительной площадке 2 через строительную площадку 4?

Решим эту задачу *методом присвоения меток.* Каждому узлу присваиваем метку из двух чисел. Первое число — это минимальное расстояние от узла 7 до данного узла, второе — номер предыдущего узла на пути от узла 7 к данному узлу. Узел, для которого мы определили путь от узла 7, назовем *помеченным.* Узел, для которого такой путь еще не определен, назовем *непомеченным.* Если мы определили кратчайшее расстояние от узла 7 до данного узла, то соответствующую метку назовем *постоянной* и будем обозначать в круглых

скобках. Все остальные метки назовем *временными* и будем обозначать в квадратных скобках. Узлы с постоянными метками будем закрашивать.

Итак, узлу 7 присваиваем метку (0, S), где 0 — это расстояние от узла 7, S — обозначение стартового узла.



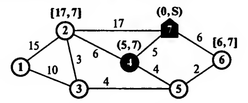
Узел 7 связан с узлами 2, 4, 6. Длины соответствующих ребер — 17, 5, 6. Поэтому узлам 2, 4, 6 присваиваем временные метки — [17, 7], [5, 7], [6, 7] соответственно (первое число — длина пути от узла 7 до данного узла, а второе — это предшествующий узел).

После выполнения этой операции можно сделать два следующих шага:

✧ найти участок (участки) минимальной длины и соответствующую временную метку (метки) сделать постоянной;

✧ узел (узлы), которому соответствует появившаяся постоянная метка, становится новым стартом.

После выполнения этой операции временная метка с наименьшим расстоянием до узла 7 становится постоянной. Это метка (5, 7) узла 4. Поэтому следующий шаг мы начнем с узла 4.

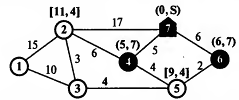


Узел 4 непосредственно связан с узлами 2 и 5 без постоянных меток. Длина ребра 4—5 равна 4, метка узла 4 — (5, 7) ⇒ временная метка узла 5 равна [5+4, 4] = [9, 4]. Длина ребра 4—2 равна 6, метка узла 4 — (5, 7) ⇒ временная метка узла 2 равна [5+6, 4] = [11, 4]. Таким образом мы нашли путь от узла 7 до узла 2 длины 11.

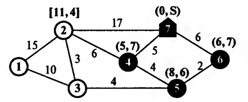
Узел 2 пока помечен меткой [17, 7] (путь длины 17), но 11 < 17 ⇒ старую метку [17, 7] узла 2 мы меняем на новую временную метку

[11, 4], где 11 — это длина пути от узла 7 до узла 2, а 4 — номер предшествующего узла.

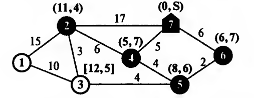
После этого из всех временных меток [11, 4], [9, 4], [6, 7] выбираем метку с наименьшим первым числом. Это [6, 7]. Эта метка становится постоянной, а очередной шаг мы начнем с узла, соответствующего этой метке, — узла 6.



Этот узел связан с узлом 5 без постоянной метки. Длина ребра 6—5 равна 2, метка узла 6 — (6, 7) ⇒ временная метка узла 5 равна [6+2, 6] = [8, 6]. Но узел 5 уже помечен меткой [9, 4]. Так как 8 < 9, то узлу 5 припишем новую метку — [8, 6]. После этого из всех временных меток [11, 4] и [8, 6] метку с наименьшим первым числом (8, 6) объявляем постоянной, а следующий шаг начнем с соответствующего ей узла 5.

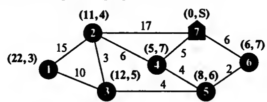


Узел 5 связан только с одним узлом без постоянной метки — узлом 3. Длина ребра 5—3 равна 4, метка узла 5 — (8, 6) ⇒ временная метка узла 3 равна [8+4, 5] = [12, 5]. Теперь из всех временных меток [11, 4] и [12, 5] метку с наименьшим первым числом [11, 4] объявляем постоянной, а следующий шаг начнем с соответствующего ей узла 2.



Узел 2 связан с узлами 1 и 3 без постоянных меток. Длина ребра 2—1 равна 15, метка узла 2 — (11, 4) ⇒ узлу 1 припишем временную метку [11+15, 2] = [26, 2]. Длина ребра 2—3 равна 3, метка узла 2 —

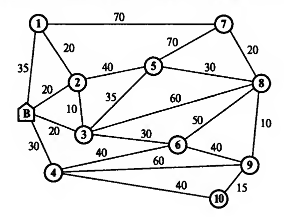
(11, 4) ⇒ мы могли бы пометить узел 3 меткой [11+3, 2] = [14, 2], но узел 3 уже помечен меткой [12, 5] с меньшим первым числом. Так что метку узла 3 не меняем. Теперь из временных меток [26, 2] и [12, 5] метка с наименьшим первым числом становится постоянной (12, 5), а с соответствующего ей узла 3 начнем следующий шаг. Метку узла 1 меняем на (12+10, 3) = (22, 3). Всем узлам приписаны постоянные метки. Действие алгоритма прекращается.



Первое число метки у каждой вершины — это длина кратчайшего пути от узла 7 до данной вершины. Чтобы восстановить кратчайший путь от узла 7 до какой-то вершины, мы должны из этой вершины перейти в соседнюю (ее номер — это второе число метки). И т. д. до вершины 7.

Теперь мы можем ответить на вопросы задачи. Метка узла 1 — (22, 3) ⇒ длина кратчайшего пути от узла 7 до узла 1 равна 22. Из узла 1 мы идем в узел 3. Метка узла 3 — (12, 5) ⇒ идем в узел 5. Метка узла 5 — (8, 6) ⇒ идем в узел 6. Метка узла 6 — (6, 7) ⇒ идем в узел 7, то есть кратчайший путь 1–3–5–6–7. Он не проходит через узел 2. Ответы на два других вопроса оставляем читателю в качестве упражнения.

Задача 20.1. Компания грузовых перевозок осуществляет услуги по перевозке грузов между Воронежем (В) и райцентрами. Если компания получает заказ на обслуживание, она как можно быстрее



посылает грузовик в райцентр, из которого поступил заказ. Так как существенны быстрое обслуживание и минимальные транспортные затраты, большое значение приобретает то, что грузовик проследует из Воронежа в соответствующий райцентр по наиболее короткому маршруту. Сеть, представленная на рисунке, отображает сеть дорог. Расстояния указаны в километрах.

Найти кратчайшие маршруты от Воронежа до всех 10 райцентров. Какова длина кратчайшего пути от Воронежа до райцентра 10? Какова длина кратчайшего пути от Воронежа до райцентра 8? Проходит ли кратчайший путь от Воронежа до райцентра 9 через райцентр 6?

Задача 20.2. Предложите алгоритм действий при наличии в сети нескольких равных постоянных меток.

§ 6.2. ЗАДАЧА О КРАТЧАЙШЕМ ПУТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ПУНКТАМИ

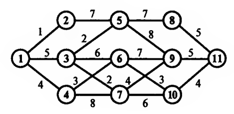
Известна схема дорог. Требуется перевезти груз из одного пункта в другой по маршруту минимальной длины.

Двигаясь от конечного пункта к начальному пункту, каждой вершине припишем число по определенным правилам. Конечной вершине присвоим число 0. Если i-я вершина в направлении от начального пункта к конечному пункту непосредственно соединена с вершинами $j_1, ..., j_k$, которым приписаны числа $r(j_1), ..., r(j_k)$, то вершине i приписывается число $r(i) = \min_s (r(j_s) + t(i, j_s))$, где $t(i, j_s)$ — длина ребра (i, j_s).

Пусть этот минимум достигается для вершины j_m. Тогда ребро (i, j_m) покажем двумя чертами со стрелкой от i к j_m. Если таких j_m несколько, то на этом шаге будет несколько двойных ребер.

Число, приписанное начальному пункту, равно минимальной длине искомого маршрута. Двигаться от начального пункта к конечному пункту нужно по двойным ребрам со стрелками.

Пример 26. Найдем маршрут минимальной длины от пункта 1 к пункту 11.



Припишем вершииам числа вместо номеров. Для 11-й вершииы это 0.

11-я вершина соедииеиа с 8-й, 9-й и 10-й вершииами, которым припишем $0 + 5 = 5$, $0 + 5 = 5$, $0 + 4 = 4$ соответственно. Все эти ребра покажем двумя чертами со стрелками.

По числам 8-й и 9-й вершии иайдем число 5-й вершииы: $\min(5 + 7, 5 + 8) = 12$. Ребро (5, 8) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 9-й и 10-й вершии найдем число 6-й вершины: $\min(5 + 7, 4 + 3) = 7$. Ребро (6, 10) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 9-й и 10-й вершии найдем число 7-й вершины: $\min(5 + 4, 4 + 6) = 9$. Ребро (7, 9) изобразим двумя чертами со стрелкой.

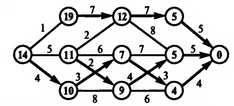
По числу 5-й вершины определим число 2-й вершииы: $12 + 7 = 19$. Ребро (2, 5) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 5-й, 6-й и 7-й вершин определим число 3-й вершииы: $\min(12 + 2, 9 + 2, 7 + 6) = 11$. Ребро (3, 7) изобразим двумя чертами со стрелкой.

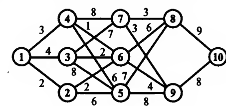
По числам 6-й и 7-й вершии найдем число 4-й вершииы: $\min(7 + 3, 9 + 8) = 10$. Ребро (4, 6) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 2-й, 3-й и 4-й вершин определим число 1-й вершииы: $\min(19 + 1, 11 + 5, 10 + 4) = 14$. Ребро (1, 4) изобразим двумя чертами со стрелкой. Длина кратчайшего пути равна 14.

Двигаемся из иачальиой вершииы 1 к коиечиой вершиие 11 по ребрам со стрелкой. Получаем кратчайший путь 1–4–6–10–11. Его длииа равиа 14.



Задача 21. Найти маршрут мииимальиой длииы от пункта 1 к пункту 10.



Глава 7

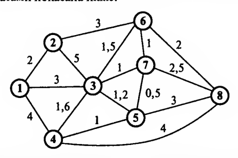
ПОСТРОЕНИЕ КОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ МИНИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ

Коммуникационная сеть минимальной длины (или *дерево кратчайших расстояний*) — это совокупность дуг сети, имеющая минимальную суммарную длину и обеспечивающая достижение всех узлов сети, то есть возможность попасть из любого узла в любой другой узел. Алгоритм построения:

1. Начать с любого узла и соединить его с ближайшим узлом. Считаем, что это связанные узлы, а все другие узлы — несвязанные.

2. Определить несвязанный узел, ближайший к одному из связанных узлов. Если таких «ближайших» узлов несколько, то выбрать любой. Добавить этот узел к связанным. И т. д. до тех пор, пока есть несвязанные узлы.

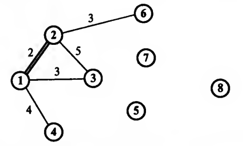
Пример 27. Университет устанавливает компьютерную систему электронной почты, которая позволит передавать сообщение между деканами восьми факультетов. Сеть возможных электронных связей между деканатами показана ниже.



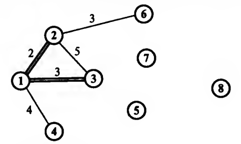
Протяженность коммуникаций в километрах отмечена на дугах. Предложим проект системы связи, которая позволит всем восьми де-

канам обеспечить доступ к системе электронной почты. Решение должно обеспечить минимальную возможную общую длину коммуникаций.

Начнем с узла 1. Ближайший к нему узел — это узел 2 на расстоянии 2. Считаем, что узлы 1, 2 — связаные, и отметим это двойной чертой.

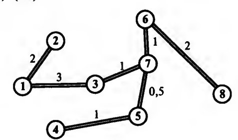


Ближайшие несвязанные узлы к одному из связанных узлов 1 и 2 — это узлы 3 и 6. Выбираем любой из них, например, узел 3. Ребро 1–3 отметим двойной чертой и считаем узлы 1, 2, 3 связанными.

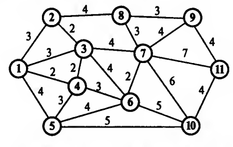


Далее ищем ближайший несвязанный узел к узлам 1, 2, 3. И т. д. В результате получим минимальное дерево.

Его длина равна сумме расстояний на дугах: 2 + 3 + 1 + 1 + 0,5 + + 1 + 2 = 10,5 (км).



Задача 22. Фирма получила заказ на прокладку кабеля для кабельного телевидения. Узлы сети, приводимой ниже, отражают точки, к которым должна быть проложена кабельная сеть.



Дуги сети показывают количество километров между точками подвода кабеля. Предложить решение, которое позволит обеспечить доступ кабельной сети ко всем точкам, но при этом общая протяженность кабельных линий будет минимально возможной.

Глава 8

ПРАВИЛА ВЫВОДА И ПОЛУЧЕНИЕ ВЫВОДИМЫХ СУЖДЕНИЙ

Рассматривается система с двумя основными правилами вывода:

1) *правило контрапозиции*: $X \rightarrow Y$ равносильно $\overline{Y} \rightarrow \overline{X}$;

2) *правило транзитивности*: из $X \rightarrow Y$ и $Y \rightarrow Z$ выводится $X \rightarrow Z$.

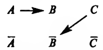
Заметим, что при использовании правила контрапозиции нужно применять также и *закон инволюции* (снятие двойного отрицания). Например, суждение $\overline{X} \rightarrow Y$ преобразуется по правилу контрапозиции в суждение $\overline{Y} \rightarrow \overline{\overline{X}}$, которое равносильно суждению $\overline{Y} \rightarrow X$.

На *графе достижимости* отмечаем исходные суждения и применяем к ним правила контрапозиции и транзитивности. Так получаются новые суждения.

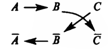
Пример 28. Получим из суждений «Все люди дышат легкими» и «Все рыбы не дышат легкими» новые суждения.

Обозначим через A — множество людей, через B — множество тех, кто дышит легкими, через C — множество рыб. Тогда $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$ — это дополнения этих множеств.

Исходные суждения $A \rightarrow B$ и $C \rightarrow \overline{B}$. Отметим их на следующем графе достижимости.



Построим контрапозиции исходных суждений. Суждение $A \rightarrow B$ равносильно суждению $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$. Суждение $C \rightarrow \overline{B}$ равносильно суждению $\overline{\overline{B}} \rightarrow \overline{C}$, то есть $B \rightarrow \overline{C}$. Отметим их на графе достижимости.

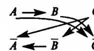


К полученному графу достижимости применим правило транзитивности.

$A \to B$ и $B \to \overline{C}$ влечет $A \to \overline{C}$.

$C \to \overline{B}$ и $\overline{B} \to \overline{A}$ влечет $C \to \overline{A}$.

Отметим это на графе достижимости.



Мы получили суждения $A \to \overline{C}$ = «Все люди не являются рыбами» и $C \to \overline{A}$ = «Все рыбы не являются людьми» (второе суждение получается из первого по правилу контрапозиции).

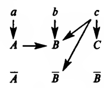
Пример 29. Получим из суждений «Все улитки молчаливы» и «Некоторые забавные существа молчаливы» новые суждения.

Обозначим через A — множество улиток, через B — множество молчаливых, через C — множество забавных существ. Тогда $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$ — это дополнения этих множеств.

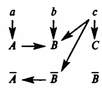
Элементы множеств A, B и C будем обозначать a, b и c соответственно: $a \to A$, $b \to B$, $c \to C$.

Суждению «Все улитки молчаливы» соответствует $A \to B$. Суждению «Некоторые забавные существа молчаливы» соответствуют $c \to C$ и $c \to B$. Но раз лишь некоторые забавные существа молчаливы, то существуют некоторые забавные существа, которые не молчаливы: $c \to C$ и $c \to \overline{B}$.

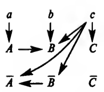
Отметим это на графе достижимости.



К этому графу достижимости применим правило контрапозиции:



К этому графу достижимости применим правило транзитивности:



Получаем новое суждение $c \to \overline{A}$ = «Некоторые забавные существа не улитки».

Задача 23. Получить из суждений «Все малые дети неразумны», «Всякий, укрощающий крокодилов, заслуживает уважения», «Всякие неразумные люди не заслуживают уважения» новые суждения.

Глава 9

АЛГОРИТМ

§ 9.1. ЧТО ТАКОЕ АЛГОРИТМ?

Понятие алгоритма принадлежит к числу основных понятий математики. Под *алгоритмом* понимается понятное и точное предписание исполнителю совершить последовательность действий, направленных на решение поставленной задачи.

Конечно, такое определение алгоритма нельзя считать строгим. Но для наших дальнейших целей этого вполне достаточно. Да и многие люди, совершенно не знакомые с определением алгоритма, умудряются успешно применять это понятие в своей практической деятельности.

§ 9.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА АЛГОРИТМА

Основные свойства алгоритма — это дискретность, точность, понятность для исполнителя, результативность и массовость.

Исполнение алгоритма разбивается на шаги (*команды*). В этом заключается *дискретность* алгоритма. Только закончив выполнение очередного шага, можно переходить к выполнению следующего шага. Изменение порядка шагов недопустимо.

Исполнитель, выполнив очередной шаг, всегда должен знать, какая команда выполняется дальше. В этом заключается свойство *точности* алгоритма.

Любой алгоритм ориентирован на конкретного исполнителя. Поэтому форма представления алгоритма должна быть понятна исполнителю. Исполнитель должен быть в состоянии выполнить любую команду алгоритма. Это свойство *понятности для исполнителя*.

Выполнение любого алгоритма сводится к выполнению конечного числа действий (правда, число шагов заранее неизвестно). Это говорит о *результативности* алгоритма.

Один и тот же алгоритм позволяет решать большое число однотипных задач. В этом заключается *массовость* алгоритма.

Пример 30. Рассмотрим алгоритм умножения чисел от 6 до 9 на пальцах:

1) вычесть из каждого множителя число 5;
2) полученные числа отложить на пальцах рук (одно число — на левой руке, другое число — на правой руке);
3) определить число загнутых пальцев (это десятки);
4) перемножить незагнутые пальцы (это единицы).

Например, нужно найти произведение 7×9.

Откладываем $7 - 5 = 2$ на левой руке и $9 - 5 = 4$ на правой руке. Всего загнутых пальцев $2 + 4 = 6$ (это десятки). Перемножим незагнутые пальцы: $3 \times 1 = 3$ (это единицы). Получаем, что $7 \times 9 = 63$. Особый случай возникает при 6×6 и 6×7.

Задача 24. Найти произведение 6×8 с помощью алгоритма примера 30.

Задача 25. На поле f8 шахматной доски стоит ферзь. Играют двое и ходят по очереди. Каждый игрок за один ход может передвинуть ферзя на несколько клеток либо вниз по вертикали, либо влево по горизонтали, либо вниз по диагонали. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Определить, как должен играть начинающий, чтобы выиграть.

В тридцатых годах XX века перед математиками встала проблема точного определения алгоритма. Три возможных подхода к решению этой проблемы (вычислимые функции, машина Тьюринга и нормальные алгоритмы Маркова) привели к созданию равносильных определений алгоритма.

Ответы

1. Например, {3, 1, 2}, {1, 2, 4}, {4, 2, 3}.
2. 3603600.
3. 720.
4. {1, 2, 4}, {1, 3, 4}.
5. 120.
6. Истинно; ложно.
7. (1000).
8. Равносильны.
9. $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,z \vee xyz$.
10. $(x \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)$.

17. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

18. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

19. Да.
20.1. *B*–1 (длина 35), *B*–2 (длина 20), *B*–3 (длина 20), *B*–4 (длина 30), *B*–3–5 (длина 55), *B*–3–6 (длина 50), *B*–3–8–7 (длина 100), *B*–3–8 (длина 80), *B*–4–10–9 (длина 85), *B*–4–10 (длина 70).
21. 1–4–6–9–10 или 1–2–6–9–10. Длина маршрутов равна 16.
22. 1–4–6–7–8–9–11–10, 4–5, 4–3–2 (длина 28).
23. «Все малые дети не являются укротителями крокодилов» и «Все укротители крокодилов не являются малыми детьми».
24. 48.
25. Каждый раз ставить ферзя на одно из следующих полей: a1, b3, c2, d6, f4.

Программа учебного курса «Дискретная математика и математическая логика»

1. Комбинаторные задачи. Упорядоченные множества. Размещение из n элементов по k элементов. Число всех размещений из n элементов по k элементов.

2. Перестановки из n элементов. Число всех перестановок из n элементов.

3. Сочетание из n элементов по k элементов. Число всех сочетаний из n элементов по k элементов.

4. Высказывание. Элементарное высказывание. Булевы функции. Таблица истинности.

5. Основные операции: отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквиваленция.

6. Равносильные функции. Основные равносильности.

7. Нормальные формы. Элементарная конъюнкция. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.

8. Элементарная дизъюнкция. Совершенная конъюнктивная нормальная форма.

9. Предикаты. Одноместный предикат. Множество истинности. Кванторные операции. Квантор общности. Квантор существования.

10. Основные понятия теории графов. Вершины, ребра, граф, орграф, дуги, начальная и конечная вершины дуги. Петля, кратные ребра, изолированная вершина. Изоморфизм графов. Маршрут, замкнутый маршрут, цепь, простая цепь, цикл, простой цикл. Путь, контур. Матричный способ задания графов. Матрицы смежности и инцидентности для графа и орграфа. Связный граф, дерево. Сеть, узел, дуга.

11. Задача определения кратчайшего пути. Метод присвоения меток. Помеченные и непомеченные узлы. Постоянные и временные метки.

12. Задача о кратчайшем пути между двумя пунктами.

13. Построение коммуникационной сети минимальной длины.

14. Правила вывода и получение выводимых суждений. Правило контрапозиции. Правило транзитивности. Закон инволюции. Граф достижимости. Примеры.

15. Алгоритм. Основные свойства алгоритма: дискретность, точность, понятность для исполнителя, результативность и массовость. Команды алгоритма. Примеры алгоритмов.

Задачи для контрольной работы по курсу «Дискретная математика и математическая логика»

1–10. Определить:

а) число всех размещений из n элементов по k элементов;

б) число всех перестановок из n элементов;

в) число всех сочетаний из n элементов по k элементов.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
n	9	7	6	5	7	9	8	10	11	12
k	3	5	4	2	4	5	5	3	2	4

11–20. Найти таблицу истинности булевой функции:

11. $\overline{x \sim y} \vee x \,\&\, y$.

12. $\overline{x \to y} \,\&\, (x \vee \overline{y})$.

13. $(x \to y) \,\&\, (x \vee y)$.

14. $(\overline{x} \to y) \vee x \,\&\, y$.

15. $(x \to y) \vee \overline{x \sim y}$.

16. $(x \sim y) \vee \overline{x \to y}$.

17. $x \vee (x \sim y) \,\&\, \overline{y}$.

18. $(x \to \overline{y}) \,\&\, (x \vee y)$.

19. $(\overline{x} \to \overline{y}) \vee x \,\&\, y$.

20. $(\overline{x} \sim \overline{y}) \vee \overline{x} \,\&\, y$.

21–30. Построить СДНФ и СКНФ для функции, таблица истинности которой имеет следующий вид.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	a
0	0	1	b
0	1	0	c
0	1	1	d
1	0	0	e
1	0	1	k
1	1	0	g
1	1	1	h

	a	b	c	d	e	k	g	h
21	1	0	0	1	1	0	1	0
22	1	0	1	0	1	0	0	1
23	0	1	1	0	0	0	1	1
24	0	0	1	1	0	1	1	0

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*k*	*g*	*h*
25	1	0	0	0	1	1	0	1
26	0	1	1	0	0	0	1	0
27	1	0	1	0	0	1	0	0
28	1	0	0	0	1	1	0	0
29	1	1	0	1	0	1	1	1
30	0	0	1	1	0	0	0	1

31–40. На множестве натуральных чисел задан одноместный предикат $P(x)$. Определить его значения при $x = a$ и $x = b$. Применить к предикату $P(x)$ кванторные операции.

31. $P(x)$ = «x — составное число», $a = 15$, $b = 13$.

32. $P(x)$ = «x — четное число», $a = 15$, $b = 18$.

33. $P(x)$ = «x — нечетное число», $a = 15$, $b = 18$.

34. $P(x)$ = «x делится на 3», $a = 15$, $b = 17$.

35. $P(x)$ = «100 делится на x», $a = 15$, $b = 25$.

36. $P(x)$ = «x больше 100», $a = 105$, $b = 18$.

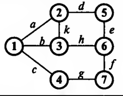
37. $P(x)$ = «x — полный квадрат», $a = 225$, $b = 18$.

38. $P(x)$ = «x — степень двойки», $a = 256$, $b = 328$.

39. $P(x)$ = «в десятичной записи числа x встречается цифра 1», $a = 225$, $b = 18$.

40. $P(x)$ = «в десятичной записи числа x не встречается цифра 2», $a = 225$, $b = 18$.

41–50. Найти кратчайший путь от вершины 1 до любой другой вершины. Построить коммуникационную сеть минимальной длины.



	41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
a	9	8	5	2	1	7	7	6	7	1
b	4	9	5	6	8	7	1	6	7	2
c	2	1	4	9	5	5	8	6	9	7
d	9	3	4	3	3	1	1	8	3	4
e	5	5	4	3	1	8	9	8	8	2
f	7	7	3	2	5	7	2	5	6	8
g	2	4	8	2	9	4	5	2	4	2
h	1	8	3	4	5	2	9	9	6	3
k	4	6	2	8	8	9	8	8	3	1

Литература

Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1997.

Ивин А. А. Практическая логика: Задачи и упражнения. М.: Просвещение, 1996.

Кулик Б. А. Логические основы здравого смысла. СПб.: Политехника, 1997.

Куприков Е. В., Ткаленко Р. А. Высшая математика. Рабочая программа, методические указания и контрольные задания для студентов третьего курса всех специальностей. М.: Издательство ВЗПИ, 1991.

Лихтарников Л. М. Первое знакомство с математической логикой. СПб.: Лань, 1997.

Мацкевич И. П., Свирид Г. П., Булдык Г. М. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Теория вероятностей и математическая статистика. Мн.: Вышэйшая школа, 1996.

Просветов Г. И. Бизнес-планирование: Задачи и решения. 2-е изд. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Маркетинговые исследования: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Математика в экономике. 2-е изд. М.: Издательство РДЛ, 2005.

Просветов Г. И. Математика для юристов. М.: Издательство РДЛ, 2005.

Просветов Г. И. Математические методы в логистике: Задачи и решения. 2-е изд. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Математические методы в экономике. 3-е изд. М.: Издательство РДЛ, 2007.

Просветов Г. И. Прогнозирование и планирование: Задачи и решения. 2-е изд. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Управление рисками: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Финансовый анализ: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Финансовый менеджмент: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2007.

Просветов Г. И. Финансы, денежное обращение, кредит: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Ценные бумаги: Задачи и решения. 2-е изд. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Цены и ценообразование: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2007.

Просветов Г. И. Эконометрика: Задачи и решения. 5-е изд. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Экономика предприятия: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Экономический анализ: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Сидоренко Е. В. Методы математической обработки в психологии. СПб.: Речь, 2004.

Суходольский Г. В. Математические методы в психологии. Харьков: Гуманитарный Центр, 2004.

Литература

Раздел III.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Раздел IV.
ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебно-практическое пособие

Просветов Георгий Иванович

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРИЕВ: ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.ФЦ.15.953.П.000115.06.03 от 16.06.2003 года

Подписано в печать 25.06.08 г.
Бумага газетная. Формат 60×84/16.
Гарнитура «Ньютон». Печать офсетная.
Печ. л. 20,0. Тираж 2000 экз.
Зак. № 5859.

ООО Издательство «Альфа-Пресс»

117574, Москва, а/я 117
Тел.: (495) 777-40-60, 540-73-03
e-mail: best@bestbook.ru

Отпечатано в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ»
Адрес: 140010, Моск. обл., Люберцы, Октябрьский пр-т, 403.
Тел.: (495) 554-21-86.